



Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ecuaciones Elípticas y Parabólicas con Datos Mixtos de tipo Dirichlet-Neumann

Tesis Doctoral

Presentada para optar al Grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas

por

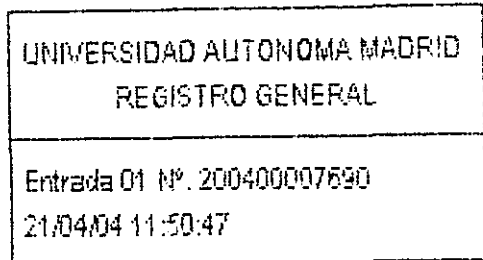
Eduardo Colorado Heras

Dirigida por

Ireneo Peral Alonso

Reg. F.C. 34.020

Madrid, Abril de 2004



A la memoria de mi madre

Agradecimientos

Esta memoria se ha llevado a cabo bajo la dirección del Profesor D. Ireneo Peral Alonso. Al cual quiero transmitir, ante todo, el inmenso placer que he sentido al trabajar con él. Gran persona, que en todo momento me ha apoyado a la hora de superar las dificultades matemáticas y las que van más allá. Gracias, por que sin ti ésto no habría sido posible.

También quiero expresar mi gratitud a la UAM, por la ayuda del tercer ciclo con la que inicié mis estudios de doctorado. A los ministerios MEC y MCYT por la concesión de una beca FPI, que marcó el inicio de mi formación como investigador. También, por supuesto, quisiera transmitir mi gratitud a todos los miembros del Departamento de Matemáticas de la UAM, del que formo parte como profesor ayudante desde 2002.

A Jesús García Azorero, con quien he disfrutado de numerosas charlas de matemáticas, por sus acertados comentarios y la lectura tan valiosa de la memoria que ha realizado.

A Magdalena, por el especial interés mostrado en todo momento.

A Boumediene Abdellaoui, quisiera agradecerle las muchas horas de trabajo compartidas y lo mucho que también he aprendido de él como profesional y aún más, si cabe, como persona.

A los que en algún momento habéis compartido despacho conmigo o simplemente vuestro tiempo, tanto dentro como fuera del departamento: Ernesto, Poxon, Ana G., Alicia, Fernando, Alfonso, Lola, Ademir y Ana P.. Especialmente a Ernesto por haberme ayudado en todo momento y leído parte de la memoria y a Ana P. también por ésto último.

A Carlos Arce, aquel profesor de secundaria con quien comencé a disfrutar de las matemáticas.

A Julia, a J. José y a Juanjo, por la buena acogida con que me habéis recibido en vuestra familia, a la que ya considero como mía.

A mi padre y a mis hermanos Charo y Fernando por vuestro apoyo incondicional y comprensión, como sabéis, en las buenas y malas etapas de nuestra vida. A Pepe por tan buenas tertulias compartidas, que echo de menos. Y a M^a José Vidal, a la que considero una hermana.

A Rosa. Sobre ella y lo que siento sobran los comentarios. Quisiera, eso si darle las gracias, por estar siempre ahí y, como a otras personas, por su lectura hecha “con otros ojos” de la memoria. Espero que sigamos compartiendo ésto tan maravilloso que nos une.

Y finalmente, a mi madre por el cariño con el que siempre nos trató y por tanto amor que nos dió. Nunca te olvidaremos.

2.4.2	Bifurcación desde cero	84
3	Problemas Críticos	89
3.1	Introducción	89
3.2	Resultados sobre las constantes de Hardy y Sobolev	91
3.2.1	Sobre la constante de Sobolev	91
3.2.2	Sobre la constante de Hardy	94
3.3	Problema cóncavo-convexo con potencial singular	98
3.4	Un problema doblemente crítico	101
3.5	Extensión de algunos resultados	105
4	Algunos resultados de regularidad, acotación y compacidad	107
4.1	Introducción	107
4.2	Continuidad Hölder	108
4.2.1	Continuidad Hölder en el Interior	109
4.2.2	Continuidad Hölder en la Frontera	117
4.3	Estimaciones uniformes en L^∞	127
4.4	Concentración-compacidad: extensión de un teorema de P. L. Lions	130
II	Ecuaciones Parabólicas	135
5	Ecuaciones parabólicas semilineales relacionadas con las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg	137
5.1	Introducción	137
5.2	La desigualdad de Harnack y algunas extensiones	144
5.3	Algunos resultados de existencia de soluciones	147
5.4	Un resultado de unicidad	149
5.5	Resultados de no existencia de soluciones: Explosión completa en el caso $(\gamma + 1) > 0$	151
5.5.1	El caso lineal: $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}$	151
5.5.2	El caso superlineal: $\alpha > 1$, $(\gamma + 1) > 0$	158
5.6	Existencia y no unicidad en el caso sublineal, $0 < \alpha < 1$	162
6	Problemas parabólicos lineales y cuasilineales con condiciones mixtas	171
6.1	Introducción	171
6.2	Explosión en el caso $p = 2$, $\alpha \geq 1$, $(\gamma + 1) > 0$	173
6.2.1	Explosión para $\alpha = 1$, $(\gamma + 1) > 0$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,2,\gamma}$	175
6.2.2	Explosión para $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \neq \Lambda_{N,2,\gamma}$	177
6.2.3	Explosión en el caso $\alpha > 1$ y $\lambda > 0$	186
6.3	Explosión en el caso $p > 2$, $\alpha \geq p - 1$, $(\gamma + 1) > 0$	187

6.3.1 Explosión en el caso $p > 2$, $\alpha = p - 1$, $(\gamma + 1) > 0$ y $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ 187

6.3.2 Explosión en el caso $p > 2$, $\alpha > p - 1$ y $\lambda > 0$ 195

6.4 Algunos resultados y observaciones sobre la existencia de solución 196

6.4.1 El caso con $p = 2$, $\alpha = 1$ 196

6.4.2 El caso con $1 < p < 2$, $(\gamma + 1) > 0$ 198

6.4.3 El caso con p general y $(\gamma + 1) \leq 0$ 199

Bibliografía y referencias 201

Notaciones generales

Símbolo	Significado
$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$	Elemento del espacio euclídeo \mathbb{R}^N
$r = x = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)}$	Módulo de x
$D_i u = \partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$	Derivada parcial de u respecto a x_i
$D_{ij} u = \partial_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$	Segunda derivada parcial de u respecto a x_i, x_j
$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$	Gradiente de u
$D^2 u = (D_{ij} u)$	Matriz Hessiana de u
Δu	Laplaciano de u
$\Delta_p u = \operatorname{div}(\nabla u ^{p-2} \nabla u)$	Laplaciano p de u
$\Delta_{p,\gamma} u = \operatorname{div}(x ^{-p\gamma} \nabla u ^{p-2} \nabla u)$	Laplaciano (p, γ) de u , asociado a los pesos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg
p'	Exponente conjugado de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	Exponente crítico de Sobolev ($p < N$)
$\partial\Omega$	Frontera de Ω
$ A $	Medida de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^N$
$ A _m$	Medida del conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ respecto a la medida $dm = x ^m dx$
$\mathcal{H}_{N-1}(\cdot)$	Medida de Hausdorff de dimensión $N-1$
χ_A	Función característica del conjunto A
$\ \cdot\ _s$	Norma en el espacio $L^s(\Omega)$
$\ \cdot\ _X$	Norma en el espacio X
B_R	Bola en \mathbb{R}^N de radio R centrada en el origen
$B_R(x_0)$	Bola en \mathbb{R}^N de radio R centrada en $x_0 \in \mathbb{R}^N$
ω_N	Medida de la esfera unidad en \mathbb{R}^N

Introducción

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales, entendidas como el estudio profundo de modelos procedentes de la Mecánica, la Física Matemática y otras ramas de la Ciencia y la Tecnología es la proyección actual de un área clásica del Análisis Matemático, además de una importante referencia para la generación y contraste de métodos numéricos y computacionales en muchas aplicaciones de la Ciencia y de la Tecnología. En este sentido, este campo de investigación puede inscribirse dentro de una de las áreas más importantes en la investigación presente y futura y que podríamos denominar *Matemática Fundamental para las Aplicaciones*.

El presente trabajo, inserto en este área, pretende el estudio de problemas que tienen un denominador común: su carácter crítico, o en algún sentido, límite. El carácter crítico se entiende en este trabajo bajo varios puntos de vista:

1. Problemas con falta de compacidad.
2. Problemas con falta de regularidad.
3. Problemas relacionados con constantes optimales.

Todos éstos aparecen de forma natural en múltiples y diversos marcos de las Ecuaciones en Derivadas Parciales y en sus aplicaciones a la Ciencia y a la Tecnología.

El carácter crítico hace que los problemas abordados no sean fáciles, pero sí interesantes. Ésta es una de las motivaciones que, desde el punto de vista matemático, tiene el presente estudio.

Se divide este trabajo en dos grandes apartados:

Parte (I). Ecuaciones Elípticas con Datos Mixtos de Tipo Dirichlet-Neumann.

Parte (II). Ecuaciones Parabólicas.

Algunos de los ejemplos, que se encontrarán en el presente trabajo, aparecen directamente como modelos aproximados de fenómenos en los que reacción y difusión compiten. Este tipo de modelos pueden tener su origen en reacciones químicas, combustión, difusión lineal o no lineal de calor, dinámica de poblaciones e incluso en algunos modelos simplificados de fluidos no newtonianos.

Este trabajo tiene, naturalmente, una gran cantidad de precedentes. Los más relevantes están recogidos en la lista de referencias dada al final.

Como forma general de exposición, y para evitar una longitud aún mayor, omitiremos detalles en la casi totalidad de resultados y métodos previos, dando siempre, eso sí, una referencia precisa.

Motivación y planteamiento de los problemas.

En esta memoria partimos del operador de *Laplace* Δ y la ecuación de Poisson,

$$-\Delta u = f, \quad \text{definida en un dominio } \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

A partir de ella se pueden plantear problemas de contorno del tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ + \text{Condiciones de Contorno.} \end{cases}$$

Quizá el problema de contorno más tratado en la literatura matemática haya sido el de Dirichlet, que consiste en prescribir un dato en la frontera del dominio Ω para la función u . Otras condiciones posibles son las de tipo Neumann, que lo que prescriben es la derivada normal exterior a la frontera del dominio de la función u . Por supuesto hay más, pero tal vez el hilo conductor de esta memoria, sea el estudio de la transición de las condiciones de Dirichlet a las de Neumann, llevada a cabo a través de condiciones de tipo Mixto Dirichlet-Neumann, que pueden verse como condiciones de tipo Robin con coeficientes dados por funciones características. Precisamente, fijamos dos variedades $\Sigma_i \subset \partial\Omega$, $i = 1, 2$ regulares de dimensión $N - 1$ tales que:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \quad \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2 = \partial\Omega \quad \text{y} \quad \bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \Gamma,$$

donde suponemos que Γ es una subvariedad regular de dimensión $N - 2$, que llamaremos *interface*, y se definen las condiciones de contorno por:

$$\chi_{\Sigma_1}(x)u + \chi_{\Sigma_2}(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

Tanto en el estudio de los problemas mixtos con condiciones fijas, como en la transición de Dirichlet a Neumann, o viceversa, al mover las condiciones de contorno surgen problemas; unos sencillos de resolver con técnicas clásicas y otros difíciles e interesantes en los que la teoría clásica no funciona. Uno de los problemas importantes es que sólo se puede obtener continuidad Hölder en $\overline{\Omega}$. Incluso el teorema de tipo Hopf es diferente (véase [54]).

Otro punto de partida es la siguiente desigualdad de Hardy.

Lema 1 (Hardy-Sobolev) Sea $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, entonces $\frac{u}{|x|} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y además

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \Lambda_N^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad (1)$$

donde la constante¹ $\Lambda_N = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ es óptima y no se alcanza.

Para más detalles, nos referimos al libro clásico de Hardy-Littlewood-Polya [83], y para una demostración en el caso de dimensión N puede verse, por ejemplo [70].

Del resultado anterior enfatizamos dos hechos fundamentales para el estudio que se hará posteriormente:

- La constante optimal Λ_N no se alcanza en el espacio de Sobolev.
- La constante optimal es la misma para cualquier dominio Ω acotado conteniendo el origen. En este caso tampoco se alcanza.

Cuando tomamos dominios acotados, con condicionces de tipo mixto, la constante de Hardy asociada depende tanto del dominio Ω como de las condiciones que prescribamos en él, tal es así que podemos dar condiciones en la distribución de Σ_1 de forma que la constante de Hardy $\Lambda_N(\Omega, \Sigma_1)$ se alcance.

La desigualdad de Hardy (1) es conocida también como una expresión del *Principio de Incertidumbre* de Heisenberg. Para mayor información sobre este aspecto es recomendable el artículo de Fefferman [65].

Desde el punto de vista de las ecuaciones elípticas, la desigualdad de Hardy puede leerse como sigue:

El problema de AUTOVALORES

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u \text{ en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

tiene un comportamiento patológico.

¹Véase el apartado de Notaciones Generales.

Véanse [70] y [125] para una mejor comprensión de este fenómeno y sus consecuencias. Nótese que $a(x) \equiv |x|^{-2} \in L^r_{\text{loc}}$ sólo si $r < N/2$, y es bien sabido que el valor $\frac{N}{2}$ es crítico para unicidad, acotación, verificación del principio fuerte del máximo para el operador $-\Delta + a(x)I$, etc.

El siguiente resultado de Baras-Goldstein en [19], que responde a una conjetura hecha por Brezis, va a ser objeto de extensión y análisis en la segunda parte de este trabajo.

TEOREMA (Baras-Goldstein).

Consideremos el problema de valores iniciales con dato frontera Dirichlet,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, t > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega, \quad f \in L^2, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

donde Ω es un dominio tal que $0 \in \Omega$, entonces:

- i) Si $\lambda \leq \Lambda_N$, el problema (2) tiene solución global única.
- ii) Si $\lambda > \Lambda_N$, el problema (2) no tiene solución local si $f > 0$. Además, si v_n es la solución del problema truncado para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \min \left\{ n, \frac{1}{|x|^2} \right\} \lambda u, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega, \quad f \in L^2, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) = \infty$, para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$.

A este comportamiento lo llamaremos *explosión espectral instantánea y completa*, es decir:

Cualquiera que sea el dato inicial positivo (en $L^2(\Omega)$ por ejemplo) el problema de valor inicial (2) tiene solución global si $\lambda \leq \Lambda_N$, y no tiene solución si $\lambda > \Lambda_N$.

Además el fenómeno de explosión ocurre en la forma que describe el apartado ii) del Teorema.

La ecuación parabólica anterior surge como ecuación linealizada en la solución singular estacionaria de problemas de *reacción-difusión*, en los que aparece la ecuación del calor con un término de reacción *supercrítico*. Por ejemplo, este es el caso para la ecuación de la combustión de un sólido,

$$u_t - \Delta u = \lambda e^u, \quad \text{y para la ecuación de Emden-Fowler,} \quad u_t - \Delta u = \lambda u + u^{\alpha-1},$$

donde $\frac{2N}{N-2} < \alpha$. Véanse [72], [85] y [98], respectivamente. En el primer caso, la solución estacionaria *singular* es

$$S(x) = -2(N-2) \log |x|.$$

En el segundo caso, el término principal es del mismo orden logarítmico pero tiene otros términos acotados. Resultados para el comportamiento de la ecuación de la combustión pueden verse en [106] y [33] como referentes más cercanos a este estudio.

Hay una familia de desigualdades con un comportamiento similar a la desigualdad de Hardy. Son el siguiente caso particular de las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (véase el Teorema 3), que convendremos en llamar desigualdades de Hardy-Sobolev. Precisamente, se tiene el resultado siguiente.

Teorema 2 Sean $1 < p < N$ y $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$. Entonces para cualquier $u \in \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$, se tiene

$$\int_{\Omega} |u|^p |x|^{-p(\gamma+1)} dx \leq \Lambda_{N,p,\gamma}^{-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^p |x|^{-p\gamma} dx. \quad (4)$$

Además², $\Lambda_{N,p,\gamma}$ es optimal y no se alcanza.

Las ecuaciones asociadas a estas desigualdades son:

(I) CASO ELÍPTICO

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}} + f(x) \text{ en } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ y } u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

(II) CASO PARABÓLICO

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}} + f \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u \geq 0 \text{ y } u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

Las desigualdades son también ciertas en los espacios de funciones $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, naturalmente con las constantes que corresponden.

La novedad en este caso es que la constante optimal en las desigualdades de Hardy-Sobolev puede alcanzarse en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$. De hecho³, se dan condiciones suficientes sobre Σ_1 para que dicha constante sea alcanzada, y se prueba, que la condición necesaria y suficiente

²Véase el apartado de Notaciones generales.

³Véase el Capítulo 3.

para que la constante se alcance es que sea estrictamente menor que la constante en \mathbb{R}^N . Nótese que los problemas asociados tienen condiciones mixtas.

Estos problemas y algunas variantes forman parte del objeto de estudio de la memoria. Estudiaremos en el caso elíptico su comportamiento en términos de la existencia y la no existencia, regularidad, estimaciones universales, así como la transición cuando se mueven las condiciones de contorno con cierta regularidad. En el caso parabólico se analizará la existencia, no existencia y fenómenos de explosión como el dado por el Teorema de Baras-Goldstein para la ecuación del calor, poniendo en evidencia las condiciones que son relevantes para que tal fenómeno ocurra y la influencia de las condiciones de contorno.

Recientemente se ha puesto de manifiesto que para el comportamiento de la *explosión espectral instantánea y completa*, en los problemas parabólicos con condiciones Dirichlet, hay dos ingredientes básicos:

1. El comportamiento de la constante en las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.
2. La verificación de una cierta desigualdad de Harnack.

Véanse [1], [52], [6] y [7].

Como queda dicho con anterioridad, cuando hay una parte de la frontera donde se prescribe la condición de Neumann de forma conveniente, probamos en esta memoria que la constante de las desigualdades de tipo Hardy-Sobolev es alcanzada. Este fenómeno fue originalmente establecido por Lions-Pacella-Tricarico en [94] para la constante de Sobolev, y mejorado en un sentido en esta memoria. Además, veremos que presenta algunas diferencias para los problemas con condiciones mixtas frente al de Dirichlet, tanto en el caso parabólico como en el elíptico.

Nótese que trataremos ecuaciones con coeficientes no acotados en unos casos y degenerados en el origen en otros, lo que redundará en multitud de problemas difíciles.

Descripción del contenido de la Memoria.

Primera Parte. Ecuaciones Elípticas con Datos Mixtos de Tipo Dirichlet-Neumann.

Como punto de partida para el estudio desarrollado en el **Capítulo 1** se considera el problema modelo,

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega, \\ u &> 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

donde suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y suave, $0 < q \leq 1 < r < \frac{N+2}{N-2}$.

En particular, se estudia (7) cuando $0 < q < 1 < r < \frac{N+2}{N-2}$, es decir, el problema cóncavo-convexo.

Como norma general a lo largo de toda la memoria, diremos que un dominio es regular o suave si su frontera es por ejemplo de clase C^2 .

Las condiciones de frontera las tomamos mixtas de tipo Dirichlet-Neumann, precisamente,

$$B(u) = u\chi_{\Sigma_1} + \frac{\partial u}{\partial \nu}\chi_{\Sigma_2}, \quad (8)$$

con la hipótesis

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_i \subset \partial\Omega, i = 1, 2, \text{ son subvariedades suaves de dimensión } N - 1, \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \bar{\Sigma}_1 \cup \bar{\Sigma}_2 = \partial\Omega \text{ y } \bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \Gamma \text{ es una subvariedad suave} \\ \text{de dimensión } N - 2 \text{ que llamamos } \textit{interfase}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Donde ν es la normal unitaria exterior a la frontera.

Este tipo de problemas ha sido ampliamente estudiado cuando las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet, véanse por ejemplo [36], [68], [81], [69], [13], [28], [14], [67] y las referencias en ellos citadas. El estudio con condiciones de contorno de tipo mixto es, en algunas ocasiones sencillo, a la vista de los métodos y herramientas desarrolladas en el caso Dirichlet. En otras ocasiones, se complica sobremanera.

Una de las diferencias principales entre el Problema de Dirichlet y el de condiciones mixtas es la falta de regularidad de las soluciones de (7) en la interfase Γ . Hay varios trabajos en los que se ha realizado el estudio de la misma desde varios puntos de vista como por ejemplo en los artículos [116], [99], [115] y las referencias en allí citadas.

Para solventar esta y otras dificultades, se han extendido algunas técnicas conocidas y se han desarrollado otras nuevas. Un ejemplo de extensión, no muy difícil, es la existencia de al menos dos soluciones del Problema (7) en el caso cóncavo convexo ($0 < q < 1 < r < 2^* - 1$), para algunos valores del parámetro λ , y la no existencia para otros valores de λ . El hecho de demostrar la acotación uniforme en L^∞ de las soluciones de (7) requiere una extensión no trivial del método de explosión de Gidas-Spruck en [74].

Por otra parte, se han desarrollado nuevas técnicas tanto en la demostración de un resultado de multiplicidad global, como en la variación de las condiciones de contorno y resultados asintóticos derivados.

A lo largo de toda la parte elíptica, el sentido en el que tomamos las soluciones es el de energía, véase la Definición 1.1.1.

El estudio del Problema (7) lo hacemos en dos casos: con condiciones de contorno fijas, o variables en un sentido regular que precisaremos en esta introducción. Para condiciones fijas demostramos:

1. Existencia.



2. Estimaciones uniformes en L^∞ y regularidad.
3. Multiplicidad de soluciones.

Los resultados importantes respecto al Problema (7) son:

- El Teorema 1.1.2, en el que se demuestra un resultado global de existencia y multiplicidad en el caso cóncavo convexo; no existencia para valores de λ mayores que el primer autovalor del problema de autovalores asociado. En el caso del problema con $q = 1 < r < 2^* - 1$, se prueba la existencia de un continuo de soluciones bifurcando en L^∞ a la izquierda de λ_1 desde $\|u\|_\infty = 0$.
- La extensión del método de Gidas-Spruck se realiza en la demostración de acotación uniforme en L^∞ , llevada a cabo en el Teorema 1.1.3. Este resultado requiere de uno previo de monotonía en \mathbb{R}_+^N , establecido en el Teorema 1.1.4 que mejora el resultado de Berestycki-Grossi-Pacella en [23]. Además, se obtienen regularidad y estimaciones Hölder uniformes hasta el borde, en el Teorema 1.1.6 y el Corolario 1.1.7 (que se demuestran en un caso más general en el Capítulo 4).

Definimos a continuación como varían las condiciones de contorno de manera regular. Precisamente, consideramos una familia de variedades de $\partial\Omega$, $\{\Sigma_1(\alpha)\}_{\alpha \in I_\varepsilon}$, donde $I_\varepsilon = [\varepsilon, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)]$ para $0 < \varepsilon < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$ tal que:

- (B1) $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) = \alpha$, $\alpha \in I_\varepsilon$.
- (B2) $\Sigma_1(\alpha_1) \subset \Sigma_1(\alpha_2)$ si $\alpha_1 < \alpha_2$.
- (B3) $\Sigma_1(\alpha)$ es conexa.

Denotamos por $B_\alpha(\cdot)$ las condiciones de contorno definidas como $B(\cdot)$ en (1.1), con Σ_i , Γ reemplazadas por $\Sigma_i(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)$.

En las hipótesis (1.2), (B1), (B2) y (B3) consideramos la correspondiente familia de problemas:

$$(P_{\alpha,\lambda}) \equiv \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^r \text{ en } \Omega, \\ u &> 0 \text{ en } \Omega, \\ B_\alpha(u) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

De esta forma, para los Problema $(P_{\alpha,\lambda})$ con $\alpha \in I_\varepsilon$ obtenemos la siguiente mejora de las estimaciones L^∞ , dadas en el Teorema 1.1.3 para el Problema (P_λ) .

Precisamente, la familia de todas las soluciones de los problemas $(P_{\alpha,\lambda})_{\alpha \in I_\varepsilon}$ está acotada uniformemente en L^∞ por una constante que depende de ε . Éste es el contenido del Teorema 1.1.5.

Otra dirección en la que investigamos, es el comportamiento asintótico del primer autovalor de los problemas mixtos aquí considerados. Exactamente, estudiamos el comportamiento del primer autovalor para el problema

$$(EP_\alpha) \equiv \begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1(\alpha)u \text{ en } \Omega, \\ u &> 0 \text{ en } \Omega, \\ B_\alpha(u) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuando $\alpha \rightarrow 0$ ó $\alpha \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$. Concretamente, demostramos:

$$\lambda_1(\Sigma_1) \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1) \rightarrow 0 \text{ y } \lambda_1(\Sigma_1) \rightarrow \lambda_1^D \text{ cuando } \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_2) \rightarrow 0.$$

Paralelamente, se demuestra la convergencia de sucesiones correspondientes de autofunciones normalizadas. Véanse los Teoremas 1.4.1 y 1.4.2.

En cuanto a resultados relacionados, cabe destacar los de J. Dávila [55] y de J. Denzler en [58] y [59]. En [55] se consideran datos mixtos y en un proceso de paso al límite variando las condiciones de contorno, de manera diferente a la considerada en esta memoria, se llega a un problema con condiciones de tipo Robin con datos dados por medidas. Por otro lado, Denzler, demuestra en [58] que fijada la medida⁴ de Σ_1 , es posible distribuir esta variedad a lo largo de $\partial\Omega$ de forma que, si $\lambda_1(\Sigma_1)$ es el primer autovalor de (EP_α) y λ_1^D el primer autovalor con condición Dirichlet, se verifica:

$$\sup_{\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1)=a} \lambda_1(\Sigma_1) = \lambda_1^D, \quad \forall a \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)).$$

Además, este supremo no se alcanza. Mientras que en [59] se demuestra que en las mismas condiciones, el ínfimo sí se alcanza, es decir,

$$\min_{\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1)=a} \lambda_1(\Sigma_1) = \lambda_1^a \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)), \quad \forall a \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1)).$$

Los resultados de este capítulo son esencialmente el contenido del *artículo* [48].

Otro de los temas desarrollado en la memoria es el de la bifurcación, así como propiedades y comportamiento de las soluciones del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f_\lambda(x, u) \text{ en } \Omega, \\ u &> 0 \text{ en } \Omega, \\ B(u) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10)$$

a lo que dedicamos el **Capítulo 2**. Donde se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y acotado con $0 \in \Omega$, $1 < p < N$ y $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$, con diferentes elecciones del segundo miembro f_λ .

⁴Medida de Hausdorff de dimensión $N-1$.

donde suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) es un dominio suave y acotado con $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $1 < q \leq p-1$, $r = p^* - 1$, y $0 \leq \lambda \leq \Lambda$, que será el valor extremal a partir del cual no existe solución. Las condiciones de contorno suponemos que satisfacen:

$$B_\alpha(u) = u\chi_{\Sigma_1(\alpha)} + |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \chi_{\Sigma_2(\alpha)} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) = \alpha \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)),$$

junto con (9).

La hipótesis sobre la variación de las condiciones de contorno es

(H1) $\Sigma_1(\alpha_1) \subset \Sigma_1(\alpha_2)$ para $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Sigma_1(\alpha) = \mathcal{C}_1 \subset \partial\Omega$ con $\text{cap}_{p,\mu}(\mathcal{C}_1) = 0$.

Donde denotamos por $\text{cap}_{p,\mu}(E)$ la (p, μ) -capacidad del conjunto E , que no es más que la p -capacidad de E respecto a la medida $d\mu = |x|^{-p\gamma} dx$ (véanse [84] ó [96] por ejemplo).

La estructura del capítulo es la siguiente:

Se comienza recordando algunos resultados relativos a la constante de Sobolev con condiciones mixtas, establecidos principalmente por Egnell, Lions, Pacella y Tricarico en los artículos [63], [94] y [104]. Posteriormente, probamos una condición suficiente para obtener la alcanzabilidad de la constante de Sobolev. Esta condición está relacionada con la convergencia del primer autovalor cuando movemos las condiciones de contorno como indica **(H1)** (véase el Teorema 2.3.13).

También demostramos condiciones suficientes en dos direcciones: por un lado, extendemos el resultado de Wang-Zhu en [126] a la constante $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ definida en (2.11); por otro lado, damos una condición suficiente, similar a la establecida para la constante de Sobolev en la que se utiliza la convergencia del primer autovalor. Este hecho revela una profunda diferencia entre el caso Dirichlet y el caso con condiciones mixtas.

Se estudian resultados de existencia y no existencia del *problema doblemente crítico*:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^{p^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u &> 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (18)$$

Hay que enfatizar la diferencia con el caso de datos Dirichlet en el cual, en general, el problema doblemente crítico no tiene solución positiva.

Finalmente, en la Sección 3.5 señalamos cómo de manera casi inmediata se extienden algunos de los resultados demostrados en las secciones previas, al caso del operador $\Delta_{p,\gamma}$.

Los resultados de este capítulo son parte del contenido del *artículo* [51] que se someterá a publicación en breve.

La parte elíptica finaliza con el **Capítulo 4**, en el que se investigan regularidad y estimaciones uniformes en L^∞ para el Problema (19), relacionado con las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (13). Por otro lado, se establece la extensión de unos resultados de P. L. Lions en [93] Partes I y II, que se utilizaron en capítulos anteriores.

El problema modelo a estudiar en las dos primeras secciones de este capítulo es:

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = f, & \text{en } \Omega \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

donde suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio suave con $0 \in \Omega$, $f \in L_\eta^r(\Omega)$ para algún $r > \frac{N}{p}$, $\eta = -p^*\gamma \frac{r-1}{r}$, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$ y las condiciones de contorno $B(\cdot)$ vienen definidas por (11) y (9). Concretamente, se demuestra que las soluciones del Problema (19) son Continuas Hölder con exponente $0 < \kappa < 1/2$, es decir, están en el espacio $C^\kappa(\overline{\Omega})$.

El resultado principal en cuanto a la regularidad Hölder es:

Teorema 4 *Sea $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ solución del Problema (19). Entonces, existe $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ tal que $u \in C^\kappa(\overline{\Omega})$.*

Obsérvese que el exponente $\kappa \rightarrow 0$ cuando $r \searrow \frac{N}{p}$, y por otro lado, κ se aproxima a $\frac{1}{2}$ para valores de r suficientemente grandes. El límite máximo de regularidad es $\kappa = \frac{1}{2}$, como pone de manifiesto el contraejemplo de Shamir en [115] (véase la introducción de la Sección 1.6).

El Teorema 4 se obtiene como consecuencia inmediata de los dos teoremas siguientes, en los que las dificultades están aisladas. Por un lado, en el Teorema 5 se obtiene la regularidad en entornos del origen y por otro lado, en el Teorema 6, se tiene la regularidad en entornos de la interfase Γ . En el resto del dominio, la regularidad es un resultado clásico.

Teorema 5 *Sea $u \in L^\infty$ una función verificando una desigualdad de tipo Cacciopoli (ver la desigualdad (4.3)). Entonces u es continua Hölder en un entorno del origen. Concretamente, dado $R > 0$ tal que $B_R(0) \subset \subset \Omega$, existe $0 < \kappa < 1$ tal que $u \in C^\kappa(B_R(0))$.*

Obsérvese que en particular el teorema es también válido para mínimos ó incluso cuasimínimos de funcionales, en las hipótesis adecuadas.

Teorema 6 *Sea u solución del Problema (19). Entonces existen dos constantes $H > 0$ y $0 < \kappa < 1/2$ tales que para todo $y \in \Gamma$, $\rho < \delta(y)$ tenemos*

$$\text{osc}(u, \rho) \leq H\rho^\kappa. \quad (20)$$

El caso $(\gamma + 1) \leq 0$ es un caso particular de los resultados en [52] donde se demuestra, en particular, que el Problema (25) con $\alpha = 1$ tiene solución débil global para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, no hay fenómeno de explosión aunque la constante optimal de la desigualdad de Hardy-Sobolev correspondiente no se alcanza y es la misma para cualquier dominio que contenga el origen. Se dará una idea de este resultado, que en este caso lineal es bastante elemental.

Nos centraremos, por tanto, en el caso $(\gamma + 1) > 0$. La diferencia fundamental con el caso $(\gamma + 1) \leq 0$, es que si $(\gamma + 1) > 0$, la ecuación homogénea asociada verifica la desigualdad de Harnack parabólica (5.12). Este hecho fue demostrado por Chiarenza-Serapioni en [45], y en casos más generales por Gutiérrez y Wheeden en [82]. Notése que la condición sobre γ es óptima.

Tras establecer nuestros resultados podremos decir que la desigualdad de Harnack y el comportamiento de la constante optimal de la desigualdad de Hardy-Sobolev son las propiedades principales para tener la EXPLOSIÓN ESPECTRAL INSTANTÁNEA Y COMPLETA.

Para el caso $\alpha > 1$ un análisis de la homogeneidad pone de manifiesto que el comportamiento respecto a la explosión instantánea y completa es independiente de λ .

Los resultados principales en el Capítulo 5 son los siguientes:

1. En la Sección 5.3 se estudia de forma sucinta el caso $(\gamma + 1) < 0$, estableciendo la existencia de solución global mediante una estimación de energía conveniente. En [52] pueden encontrarse los detalles incluso de casos más generales.
2. La Sección 5.2 está dedicada a formular con precisión la desigualdad de Harnack probada en [45]; se demuestra además una versión débil que se utilizará con frecuencia.
3. El resultado principal en la Sección 5.4 lo constituye la unicidad para el Problema (5.9) recogido en el Teorema 5.4.1.
4. Los resultados principales sobre no existencia y explosión instantánea y completa forman el contenido de la Sección 5.5.

En la primera Subsección, 5.5.1, se demuestran los Teoremas 5.5.1 y 5.5.6 sobre la no existencia y la *explosión espectral instantánea y completa* en el caso lineal.

En la Subsección 5.5.2 se estudia el caso superlineal, es decir, $\alpha > 1$ en el Problema (25). Los resultados fundamentales en este apartado son los Teoremas 5.5.8 y 5.5.11. Se demuestran, sin ninguna restricción sobre λ , la no existencia y la explosión instantánea y completa de los problemas aproximados para cualquier dato no negativo y no idénticamente nulo, respectivamente.

5. La Sección 5.6 se ocupa del estudio del caso sublineal, $0 < \alpha < 1$, para el cual se prueba la existencia de una solución global. Además, se obtiene el comportamiento de la solución en el caso que el dato inicial esté dominado por la única solución estacionaria de la ecuación elíptica asociada.

Hemos de destacar que el método de demostración es distinto a los usados por Baras-Goldstein, fuertemente ligado a la fórmula de representación de las soluciones de la ecuación del calor, y por Brezis-Cabré. Buscando un método que fuese válido para los problemas cuasilineales, nuestro método de demostración de la no existencia se basa en la desigualdad de Picone, Teorema 2.2.2, del Capítulo 2. En particular, se tiene una demostración alternativa a la de Baras-Goldstein en el caso de la ecuación del calor.

Los resultados de este capítulo son el contenido del *artículo* [1].

Finalmente, se abordan los problemas parabólicos con condiciones de contorno mixtas en el **Capítulo 6**, donde el problema general que se analiza es:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{u^\alpha}{|x|^{p(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega, \end{cases} \quad (26)$$

en el que las condiciones de contorno vienen definidas por (9) y (11).

Este capítulo es por un lado, la extensión del Capítulo 5 con $p = 2$ y condiciones Dirichlet a condiciones de contorno mixtas y por otro lado, la extensión (con novedades) de algunos resultados de [6] y [52] con condiciones Dirichlet y $p \neq 2$ al caso con condiciones mixtas.

Obsérvese que la constante de Hardy-Sobolev $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza cuando

$$\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,p,\gamma}.$$

Este hecho genera nuevas dificultades para demostrar la explosión espectral instantánea y completa en el caso que $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcance, dado que los métodos del Capítulo 5, desarrollados para datos Dirichlet, en general no funcionan. Mientras que en el caso que coincidan, $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,p,\gamma}$, los resultados del Capítulo 5 siguen siendo válidos al menos para $p = 2$.

Concretamente, el capítulo está organizado de la siguiente manera:

- En la Sección 6.2 estudiamos el caso $p = 2$, $\alpha \geq 1$, que a su vez dividimos en tres subsecciones, según $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,p,\gamma}$, $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \neq \Lambda_{N,p,\gamma}$ ó $\alpha > 1$.
- En la Subsección 6.2.2, suponemos que $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \neq \Lambda_{N,2,\gamma}$, y por tanto, $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza; aquí las técnicas anteriores no son válidas para el intervalo $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \lambda \leq \Lambda_{N,2,\gamma}$. En este caso, seguimos las ideas de Goldstein-Zhang en el artículo reciente [77], en el que extienden el resultado de explosión de Baras y Goldstein, en [19], a ecuaciones parabólicas con coeficientes variables y potencial singular, utilizando una extensión del método empleado por Cabré-Martel en [39].

- El caso $p = 2$, $\alpha > 1$ y $\lambda > 0$ lo estudiamos en la Subsección 6.2.3, donde tratamos de manera inmediata la extensión de los resultados de la Subsección 5.5.2 a las condiciones mixtas. Obsérvese que no importa el hecho de si $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza o no, porque la falta de homogeneidad en el espacio, hace que el comportamiento del problema sea independiente de $\lambda > 0$.
- En la Sección 6.3 estudiamos la explosión en el caso cuasilineal $p > 2$ y $\alpha \geq p - 1$, que en función de α , la dividimos en dos subsecciones:
 1. En la Subsección 6.3.1 tratamos el Problema (26) con $p > 2$, $\alpha = p - 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$, donde siguiendo los argumentos de [52], también obtenemos un resultado incluso más fuerte que en el caso lineal $p = 2$. Precisamente, se obtiene que incluso el problema truncado explota en tiempo finito.
 2. La Subsección 6.3.2 la dedicamos a señalar como se obtiene la no existencia y explosión completa en el caso $p > 2$, $\alpha > p - 1$ y $\lambda > 0$, cuya demostración sigue las ideas mostradas en el capítulo anterior para $p = 2$ y condiciones Dirichlet. Los resultados con $p > 2$ y datos Dirichlet pueden verse en [6] y la demostración para condiciones mixtas es la misma.
- La sección final, Sección 6.4, la dedicamos a demostrar algunos resultados de existencia, a señalar como otros, con datos Dirichlet, se extienden a datos mixtos de manera inmediata y damos referencia de otros, también para datos Dirichlet, en los que su extensión al caso mixto no es inmediata.
 1. Concretamente, en la Subsección 6.4.1, señalamos que en el caso lineal $p = 2$ y $\alpha = 1$ (como en el Capítulo 5 para datos Dirichlet) obtenemos existencia de solución global en cualquiera de las dos alternativas siguientes:
 - (i) $\lambda < \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ y $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$
 - ó
 - (ii) $\lambda > 0$ y $(\gamma + 1) \leq 0$.
 Además estudiamos una perturbación del Problema (26) con $p = 2$ y $(\gamma + 1) > 0$ (para el que se demuestra en la Sección 6.2 la explosión espectral instantánea y completa cuando $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$) en el que demostramos existencia global cuando añadimos un término de absorción, el cual hace que se “queme” la suficiente masa para que no haya explosión.
 2. En la Subsección 6.4.2 señalamos que en el caso $1 < p < 2$ y $0 < (\gamma + 1) < \frac{N(2-p)}{2p}$ hay existencia de solución global. La demostración es idéntica al caso Dirichlet (véase [52] para más detalles).
 3. Finalmente, en la Subsección 6.4.3 apuntamos algunas ideas sobre existencia local cuando $(\gamma + 1) \leq 0$ y todo $p > 1$. Concretamente, se utiliza una supersolución que sólo depende del tiempo. Para terminar, se da referencia de resultados relacionados con la existencia global y la extinción en tiempo finito

cuando $1 < p < 2$ en el caso Dirichlet; de hecho en [52] donde se demuestra, en particular, que para el caso $\alpha = p - 1$ hay solución débil global para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para datos mixtos es aún desconocido. Esta es una línea de trabajo en progreso.

Los resultados de este capítulo se corresponden esencialmente el contenido del *artículo* [2], en preparación.

Parte I

**Ecuaciones Elípticas con Datos
Mixtos de Tipo
Dirichlet-Neumann**

Capítulo 1

Problemas Semilineales

1.1 Introducción

En las últimas décadas los problemas de Dirichlet y Neumann asociados a una ecuación elíptica del tipo

$$-\Delta u = f(x, u)$$

han sido investigados con diferentes clases de segundo término, $f(x, u)$, en general no lineal.

En este capítulo, estudiamos la misma clase de ecuaciones pero con condiciones de frontera de tipo mixto Dirichlet-Neumann. Precisamente, consideremos el siguiente problema modelo

$$(P_\lambda) \equiv \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega, \\ u &> 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y suave, $0 < q \leq 1 < r < 2^* - 1$, donde

$$2^* = \begin{cases} \infty, & \text{si } N \leq 2, \\ \frac{2N}{N-2}, & \text{si } N \geq 3, \end{cases}$$

es el exponente crítico en la inclusión compacta del espacio de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ en los espacios de Lebesgue $L^s(\Omega)$, $1 \leq s < 2^*$.

Las condiciones de frontera las definimos por

$$B(u) = u\chi_{\Sigma_1} + \frac{\partial u}{\partial \nu}\chi_{\Sigma_2}, \quad (1.1)$$

con la hipótesis

$$\begin{cases} \Sigma_i \subset \partial\Omega, i = 1, 2, \text{ son subvariedades suaves de dimensión } N-1, \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega \text{ y } \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Gamma \text{ es una subvariedad suave} \\ \text{de dimensión } N-2 \text{ que llamamos "interfase".} \end{cases} \quad (1.2)$$

Denotamos por ν la derivada normal exterior a la frontera y por χ_{Σ_i} la función característica de Σ_i , $i = 1, 2$. El espacio natural en el que buscamos soluciones para el problema (P_λ) es

$$E_{\Sigma_1}(\Omega) = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Sigma_1\} \quad (1.3)$$

que podemos definir como la clausura de $C_c^\infty(\Omega \cup \Sigma_2)$ equipado con la norma de $W^{1,2}(\Omega)$.

A lo largo de, no solo en este capítulo, sino de toda la parte elíptica (Capítulos 1, 2, 3 y 4), entendemos las soluciones en el sentido de energía que definimos a continuación.

Definición 1.1.1 (Solución de energía) Sea el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

donde suponemos que $f \in (E_{\Sigma_1}^2(\Omega))'$, el espacio dual de $E_{\Sigma_1}^2(\Omega)$. Decimos que $u \in E_{\Sigma_1}^2(\Omega)$ es una solución de energía del Problema (1.4) si se verifica:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in E_{\Sigma_1}^2(\Omega).$$

Con las condiciones de frontera fijas estudiamos:

1. Existencia.
2. Estimaciones uniformes en L^∞ y regularidad.
3. Multiplicidad de soluciones.

Los resultados importantes respecto al Problema (P_λ) son:

Teorema 1.1.2 Consideremos el problema (P_λ) con $0 < q \leq 1 < r < \frac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$, ($0 < q \leq 1 < r < \infty$ si $N = 1, 2$) y $\lambda > 0$ entonces:

(I) si $q = 1$ existe al menos una solución para todo $\lambda < \lambda_1$, donde λ_1 denota el primer autovalor del Laplaciano con las mismas condiciones de contorno, y no hay solución si $\lambda \geq \lambda_1$. Además existe un continuo de soluciones bifurcando desde $(\lambda_1(\alpha), 0)$, el cual corta al eje $\{\lambda = 0\}$.

(II) Si $0 < q < 1$ (caso cóncavo-convexo).

(IIa) Existe un $0 < \Lambda < \infty$ tal que:

1. Si $\lambda > \Lambda$ no hay solución.
2. Si $0 < \lambda < \Lambda$ existe solución minimal. Además la familia de soluciones minimales es creciente con respecto a λ .
3. Si $\lambda = \Lambda$ existe al menos una solución.
4. Si $0 < \lambda < \Lambda$ existen al menos dos soluciones.

(IIb) Existe un continuo de soluciones bifurcando desde $\lambda = 0$, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$.

En la demostración de este teorema, necesitamos estimaciones uniformes en L^∞ de las soluciones del problema (P_λ) , las cuales están contenidas en el teorema que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.1.3 Existe una constante positivo C tal que

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C < \infty$$

para toda solución u_λ del problema (P_λ) , en las hipótesis $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$, $0 < q < r$, $N \geq 3$ y $\lambda \in [0, \Lambda]$, donde Λ está definido en el Teorema 1.1.2.

En la demostración de los Teoremas 1.1.2 y 1.1.3, y con interés en sí mismo, se utilizará el siguiente resultado en \mathbb{R}_+^N .

Teorema 1.1.4 Consideremos el problema

$$(P) \equiv \begin{cases} -\Delta u &= u^r, \quad u > 0 \text{ en } \mathbb{R}_+^N, \\ u &= 0 \text{ sobre } \Sigma_1 \equiv \{x_1 < s_1\} \cap \{x_N = 0\}, \quad s_1 \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_N} &= 0 \text{ sobre } \Sigma_2 \equiv \{x_1 > s_1\} \cap \{x_N = 0\}, \end{cases}$$

donde $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$, $N \geq 3$. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}_+^N) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ una solución del problema (P) con $\|u\|_\infty \leq 1$. Entonces u es no decreciente en la dirección del eje x_1 .

Este resultado es una mejora de uno por Berestycki-Grossi-Pacella en [23]

Definimos a continuación como movemos las condiciones de contorno de manera regular. Precisamente, consideramos una familia de variedades de $\partial\Omega$, $\{\Sigma_1(\alpha)\}_{\alpha \in I_\varepsilon}$, donde $I_\varepsilon = [\varepsilon, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)]$ para $0 < \varepsilon < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$ tal que:

(B1) $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) = \alpha$, $\alpha \in I_\varepsilon$.

(B2) $\Sigma_1(\alpha_1) \subset \Sigma_1(\alpha_2)$ si $\alpha_1 < \alpha_2$.

(B3) $\Sigma_1(\alpha)$ es conexa.¹

Denotamos por $B_\alpha(\cdot)$ las condiciones de contorno definidas como $B(\cdot)$ en (1.1), con Σ_i , Γ reemplazadas por $\Sigma_i(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)$.

En las hipótesis (1.2), (B1), (B2) y (B3) consideramos la correspondiente familia de problemas:

$$(P_{\alpha,\lambda}) \equiv \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^r \text{ en } \Omega, \\ u &> 0 \text{ en } \Omega, \\ B_\alpha(u) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para los Problema $(P_{\alpha,\lambda})$ con $\alpha \in I_\epsilon$ obtenemos la siguiente mejora de las estimaciones L^∞ dadas en el Teorema 1.1.3 para el Problema (P_λ) . Precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.5 *Consideremos la familia $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in I_\epsilon}$ bajo las hipótesis (1.1), (1.2), (B1), (B2) y (B3). Definamos*

$$S_\epsilon = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es solución del problema } (P_{\alpha,\lambda}), \alpha \in I_\epsilon\}, \quad (1.5)$$

es decir, la familia de todas las soluciones de los problemas $(P_{\alpha,\lambda})$, $\alpha \in I_\epsilon$. Entonces existe una constante positiva M_ϵ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_\epsilon, \forall u \in S_\epsilon.$$

Las técnicas que empleamos en la demostración del Teorema 1.1.5 son el método de *explosión* de Gidas-Spruck, para lo que necesitamos algunos argumentos de compacidad que requieren conocer propiedades de h lderianidad de las soluciones. Una de las principales dificultades, en este tipo de problemas, es la falta de regularidad en la interfase $\Gamma(\alpha)$. Comprobamos que una mejora de los argumentos de Stampacchia en [116] (véanse también [99], [115]), nos permite probar estimaciones H lder globales.

La estructura del capítulo es la siguiente:

En la Sección 1.2 estudiamos un problema de contorno mixto en \mathbb{R}_+^N (Teorema 1.1.4), que tiene interés por sí mismo y que extiende un resultado de [23]. Algunas contribuciones recientes de Damascelli-Gladiali en [53], junto con los métodos dados en [74] y [91], nos permiten probar los Teoremas 1.1.3 y 1.1.5 en la Sección 1.3. En la Sección 1.4 investigamos

¹Esta hipótesis puede relajarse a considerar un número finito de componentes conexas de manera que la medida de cada componente sea acotada por abajo por una constante uniforme y positiva veces la medida de $\Sigma_1(\alpha)$.

el comportamiento asintótico del primer autovalor de los problemas mixtos aquí considerados. Más concretamente, estudiamos el comportamiento del primer autovalor para el problema

$$(EP_\alpha) \equiv \begin{cases} -\Delta u = \lambda_1(\alpha)u & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B_\alpha(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuando $\alpha \rightarrow 0$ ó $\alpha \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$. En la Sección 1.5 probamos el Teorema 1.1.2 y algunos resultados relacionados. Finalmente, en la Sección 1.6 demostramos dos resultados de compacidad: el Teorema 1.1.6 (versión simplificada del Teorema 4.2.19) y el Corolario 1.1.7, que son de importancia para demostrar las estimaciones L^∞ uniformes. Por conveniencia para el lector, lo enunciamos en este momento dado que los utilizaremos varias veces a lo largo del capítulo.

Teorema 1.1.6 *Sea u solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

con $f \in L^p(\Omega)$ para algún $p > \frac{N}{2}$. Entonces $u \in C^\kappa(\bar{\Omega})$, para algún $0 < \kappa < \frac{1}{2}$. Además, existe una constante positiva $C \equiv C(\Omega, \Sigma_1, \|u\|_\infty, \|f\|_p)$ tal que para toda solución u de (1.6) se verifica

$$\|u\|_{C^\kappa(\bar{\Omega})} \leq C.$$

Corolario 1.1.7 *Dado $0 < \varepsilon < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$, $I_\varepsilon = [\varepsilon, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)]$, supongamos que la familia $\{\Sigma_1(\alpha)\}_{\alpha \in I_\varepsilon}$ satisface las hipótesis (1.1), (1.2), (B1), (B2) y (B3). Entonces existe una constante $C \equiv C(\Omega, \Sigma_1(\alpha), \|u_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f\|_{L^p(\Omega)})$ tal que toda solución u_α del problema*

$$(P_\alpha) \equiv \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B_\alpha(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

con f en las hipótesis del teorema anterior, se verifica la siguiente estimación:

$$\|u_\alpha\|_{C^\kappa(\bar{\Omega})} \leq C, \quad \text{para todo } \alpha \in I_\varepsilon, \quad 0 < \kappa < \frac{1}{2}.$$

Publicación. Los resultados de este capítulo son esencialmente el contenido del artículo [48].

1.2 Problemas en \mathbb{R}_+^N

En esta sección probamos el Teorema 1.1.4, el cual es esencial en la demostración del Teorema 1.1.3.

La siguiente proposición debida a Bakelman y Varadhan (véanse [24], [25] ó [47]) nos garantiza una condición suficiente para asegurar que el Principio del Máximo se verifica en dominios con medida pequeña.

Proposición 1.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio con $\text{diam}(\Omega) \leq d$ y supongamos que $v \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ satisface*

$$-\Delta v \leq c(x)v \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad \limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} v(x) \leq 0$$

donde $c(x) \in L^\infty(\Omega)$. Entonces existe $\delta > 0$, dependiendo sólo de N , d y $\|c\|_{L^\infty(\Omega)}$ tal que si $|\Omega| < \delta$ entonces $v(x) \leq 0$ en Ω .

La demostración está basada en el Teorema de Alexandrof-Bakelman-Pucci, véanse [40], [47] ó [75]; Además en [38] se obtiene una mejora del resultado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1.4:

Suponemos sin pérdida de generalidad que $s_1 = 0$, basta hacer una traslación en caso contrario.

Definamos la función $v(x) = |x|^{2-N}u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$, es decir, la transformación de Kelvin para la función u . Claramente $v \geq 0$, $|v(x)| \leq |x|^{2-N}$ para $x \in \mathbb{R}_+^N$ y no es difícil comprobar que v es solución del problema

$$(P') \equiv \begin{cases} -\Delta v(x) &= |x|^{(N-2)r-(N+2)}v^r \text{ en } \mathbb{R}_+^N, \\ v &= 0 \text{ sobre } \{x_1 < 0\} \cap \{x_N = 0\}, \\ \frac{\partial v}{\partial x_N} &= 0 \text{ sobre } \{x_1 > 0\} \cap \{x_N = 0\}. \end{cases}$$

Definamos, para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Sigma(\lambda) = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N \mid x_1 < \lambda\},$$

$$T(\lambda) = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N \mid x_1 = \lambda\},$$

$$x = (x_1, x') \text{ con } x' = (x_2, \dots, x_N); \quad x^\lambda = (2\lambda - x_1, x')$$

y

$$\omega(x, \lambda) = v_\lambda(x) - v(x), \text{ con } v_\lambda(x) = v(x^\lambda), \quad x \in \Sigma(\lambda).$$

Dividimos la demostración en tres etapas:

Etapas 1. Probamos que existe $\lambda_0 \leq 0$ tal que $\omega(x, \lambda) \geq 0$ en $\Sigma(\lambda)$ para todo $\lambda \leq \lambda_0$.

La función $\omega_\lambda(x) = \omega(x, \lambda)$ verifica la ecuación

$$\begin{aligned} -\Delta\omega_\lambda(x) &= |x^\lambda|^{(N-2)r-(N+2)}v_\lambda(x)^r - |x|^{(N-2)r-(N+2)}v(x)^r \\ &= |x|^{(N-2)r-(N+2)}c_\lambda(x)\omega_\lambda(x) + d_\lambda(x)v_\lambda(x)^r, \end{aligned}$$

donde

$$c_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_\lambda(x) = v(x), \\ \frac{v_\lambda(x)^r - v(x)^r}{v_\lambda(x) - v(x)} & \text{si } v_\lambda(x) \neq v(x), \end{cases} \quad (1.7)$$

y

$$d_\lambda(x) = |x^\lambda|^{(N-2)r-(N+2)} - |x|^{(N-2)r-(N+2)}.$$

Observamos que $d_\lambda(x) \geq 0$ en $\Sigma(\lambda)$ para todo $\lambda \leq 0$. Siguiendo las ideas de Chen-Li en [43], definimos la función $\bar{\omega}_\lambda(x) = \frac{\omega_\lambda(x)}{g(x)}$ con $g(x) = \log(2 - x^{(1)})$ para $x \in \Sigma(\lambda)$ siendo $x^{(1)}$ la primera coordenada x . Teniendo en cuenta que

$$-\Delta\omega_\lambda = -\Delta(g\bar{\omega}_\lambda) = -g\Delta\bar{\omega}_\lambda - \bar{\omega}_\lambda\Delta g - 2\langle \nabla g, \nabla\bar{\omega}_\lambda \rangle,$$

obtenemos

$$-\Delta\bar{\omega}_\lambda = 2\frac{\langle \nabla g, \nabla\omega \rangle}{g} + \left(|x|^{(N-2)r-(N+2)}c_\lambda(x) + \frac{\Delta g}{g} \right) \bar{\omega}_\lambda + d_\lambda(x)\frac{v_\lambda^r}{g}.$$

En primer lugar, demostramos que existe $\lambda_0 < 0$ tal que $\bar{\omega}_\lambda \geq 0$ en $\Sigma(\lambda)$ para cada $\lambda < \lambda_0$.

Para ello, suponemos por contradicción que existen dos sucesiones, una de números reales $\{\lambda_n\}$ con $\lambda_n \rightarrow -\infty$ y otra de puntos $\{x_n\} \subset \Sigma(\lambda_n)$ tales que $\bar{\omega}_\lambda(x_n, \lambda_n) < 0$.

Nótese que existe una constante positiva C tal que fijado λ_n ,

$$|\bar{\omega}_{\lambda_n}| = \left| \frac{\omega_{\lambda_n}}{g} \right| \leq C \frac{|x^{\lambda_n}|^{2-N} + |x|^{2-N}}{\log(2 - x_1)} \rightarrow 0, \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Dado que $\bar{\omega}_{\lambda_n} = 0$ sobre $T(\lambda_n)$ y teniendo en cuenta que $\lambda_n \leq 0$,

$$\bar{\omega}_{\lambda_n} = \frac{v_{\lambda_n}}{g} \geq 0, \quad \text{sobre } \Sigma_1 \cap \{x_1 < \lambda_n\},$$

por tanto, obtenemos que $\bar{\omega}_{\lambda_n}$ alcanza su mínimo en un punto (que denotamos igual por simplicidad en la escritura) $x_n \in \Sigma(\lambda_n)$, de manera que:

$$\nabla\bar{\omega}_{\lambda_n}(x_n) = 0, \quad -\Delta\bar{\omega}_{\lambda_n}(x_n) \leq 0.$$

Por el Teorema del Valor Medio tenemos que existe una función $h(x)$, entre $v(x)$ y $v(x^\lambda)$, que verifica $c_\lambda(x) = rh^{r-1}(x)$ (ver (1.7)). Además, por definición de $v(x)$ y dado

que $\|u\| \leq 1$, tenemos que $|v(x)| \leq |x|^{2-N}$. Entonces, si $\omega_\lambda(x) \leq 0$ y $\lambda \leq 0$ resulta que $0 \leq v(x^\lambda) \leq h(x) \leq v(x) \leq |x|^{2-N}$. Como consecuencia, tenemos la siguiente estimación

$$|x_n|^{(N-2)r-(N+2)} c_{\lambda_n}(x_n) + \frac{\Delta g}{g} \leq C \left\{ \frac{1}{|x_n|^4} - \frac{1}{\left(2 - x_n^{(1)}\right)^2 \log\left(2 - x_n^{(1)}\right)} \right\} < 0$$

con $C > 0$ y para $|x_n|$ suficientemente grande (obsérvese que esto es equivalente a que $\lambda_n < 0$ con $|\lambda_n|$ grande), y por consiguiente,

$$-\Delta \bar{\omega}_{\lambda_n} \geq \left(|x_n|^{(N-2)r-(N+2)} c_{\lambda_n}(x_n) + \frac{\Delta g(x_n)}{g(x_n)} \right) \bar{\omega}_{\lambda_n}(x_n) > 0$$

que es una contradicción.

Etapla 2. En esta etapa probamos que $\omega(x, \lambda) \geq 0$ en $\Sigma(\lambda)$ para todo $\lambda < 0$.

Tomando el λ_0 de la primera etapa, tenemos que $\omega(x, \lambda) \geq 0$ en $\Sigma(\lambda)$ para todo $\lambda \leq \lambda_0$. Ahora consideramos el intervalo maximal $(-\infty, \mu)$ tal que $\omega(x, \lambda) \geq 0$ en $\Sigma(\lambda)$ para todo $\lambda \in (-\infty, \mu)$. En esta situación necesitamos probar que $\mu \geq 0$. Para ello, argumentamos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que $\mu < 0$. Por continuidad, $\omega_\mu \geq 0$ en $\Sigma(\mu)$, y por el Principio del Máximo obtenemos que ó bien $\omega_\mu \equiv 0$ ó bien $\omega_\mu > 0$, en $\Sigma(\mu)$. La primera alternativa no es posible porque si suponemos que $\omega_\mu \equiv 0$, llegamos a contradicción con el Lema de Hopf sobre $\{x_N = 0\}$ para $|x|$ suficientemente grande tal que $x_1^\lambda > 0$.

Otra manera posible de argumentar es que si suponemos $\mu < 0$ entonces v es idénticamente nula sobre $\partial \mathbb{R}_+^N$, y por un resultado de Gidas-Spruck en [74], se tiene que $v \equiv 0$ en \mathbb{R}_+^N y como consecuencia, $u \equiv 0$ en \mathbb{R}_+^N que de nuevo es una contradicción.

Consideremos la función

$$F : \mathbb{R}^N \setminus \{P_0\} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \text{con polo } P_0 = (P_1, 0, \dots, 0), \quad P_1 > \mu + 2,$$

definida por

$$F(x) = \frac{x - P_0}{|x - P_0|^2}.$$

Entonces tenemos que

$$F(\Sigma(\mu)) = B^+ \left(\hat{x}, \frac{1}{2(P_1 - \mu)} \right),$$

donde $\hat{x} = \left(\frac{1}{2(\mu - P_1)}, 0, \dots, 0 \right)$. Recordemos que v es la transformación de Kelvin de u , consideramos ahora una nueva transformación de Kelvin; dado $y \in F(\Sigma(\mu + \varepsilon))$ definimos la función

$$z_\varepsilon(y) = \frac{1}{|y|^{N-2}} \omega_{\mu+\varepsilon} \left(P_0 + \frac{y}{|y|^2} \right); \quad P_0 + \frac{y}{|y|^2} = x \in \Sigma(\mu + \varepsilon).$$

Ahora argumentamos como en [23], siguiendo el método del Moving Plane debido a A.D. Alexandrof y utilizado por primera vez por J. Serrin en [114].

La función z satisface la ecuación

$$-\Delta z_\varepsilon(y) = \frac{|x|^{(N-2)r-(N+2)}}{|y|^4} c_{\mu+\varepsilon}(x) z_\varepsilon(y) + d_{\mu+\varepsilon}(x) v_{\mu+\varepsilon}^r(x), \quad x = P_0 + \frac{y}{|y|^2}.$$

Podemos estimar el coeficiente del término lineal como sigue:

$$\frac{|x|^{(N-2)r-(N+2)}}{|y|^4} |c_{\mu+\varepsilon}(x)| \leq \frac{C}{|y|^4 |x|^4} = C \frac{|x - P_0|^4}{|x|^4} \leq \tilde{C}$$

donde la última desigualdad es consecuencia del hecho que $x \in \Sigma(\mu + \varepsilon)$, entonces $|x| > |\mu + \varepsilon| > c > 0$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Consecuentemente, podremos hacer uso de la Proposición 1.2.1 y argumentar de manera similar a Berestycki y Nirenberg en [24]. Debido a la continuidad de F en $\overline{\Sigma(\mu)}$, tomamos $K \subset \Sigma(\mu)$ un subconjunto compacto de manera que $F(K) \subset F(\Sigma(\mu + \varepsilon))$ para cada $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ suficientemente pequeño y $|F(\Sigma(\mu + \varepsilon)) \setminus F(K)| < \delta$ para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ y $\delta > 0$ como en la Proposición 1.2.1.

Puesto que $\omega_\mu > 0$ en $\Sigma(\mu)$, por continuidad y compacidad tenemos que $\omega_{\mu+\varepsilon}(x) \geq \alpha$ para algún $\alpha > 0$ y todo $x \in K$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Como consecuencia,

$$z_\varepsilon(y) = |y|^{2-N} \omega_{\mu+\varepsilon} \left(P_0 + \frac{y}{|y|^2} \right) \geq \frac{\alpha}{|y|^{N-2}} \geq \alpha' > 0 \text{ para todo } y \in F(K), \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

dado que $F(K)$ es compacto y $0 \notin F(K)$. Definimos $\Omega_\varepsilon = F(\Sigma(\mu + \varepsilon)) \setminus F(K)$. Ahora tenemos que probar que

$$\liminf_{y \rightarrow \partial\Omega_\varepsilon} z_\varepsilon(y) \geq 0, \quad (1.8)$$

o lo que es lo mismo,

$$\liminf_{x \rightarrow \partial K \cup \partial\Sigma(\mu+\varepsilon)} \omega_{\mu+\varepsilon}(x) \geq 0. \quad (1.9)$$

Si $x \rightarrow \partial K \cup \partial\Sigma(\mu + \varepsilon)$ tenemos tres posibilidades:

1. $x \rightarrow \bar{x} \in \partial K$,
2. $x \rightarrow \bar{x} \in T(\mu + \varepsilon)$,
3. $x \rightarrow \bar{x} \in \partial\mathbb{R}_+^N \cap \Sigma(\mu + \varepsilon)$.

En el primer caso, (1.9) se verifica porque $\omega_{\mu+\varepsilon} \geq \alpha > 0$ en K . El segundo se satisface por hipótesis. Finalmente el tercero resulta del hecho que $v = 0$ sobre Σ_1 y $v \geq 0$ en el conjunto $\Sigma_2 \cup \mathbb{R}_+^N$. Ahora estamos en las hipótesis de la Proposición 1.2.1, la cual nos permite concluir que

$$z(y, \varepsilon) \geq 0 \text{ en } \Omega_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \text{ ó equivalentemente } \omega_{\mu+\varepsilon}(x) \geq 0 \text{ en } \Sigma(\mu + \varepsilon), \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

que es una contradicción con la maximalidad del intervalo $(-\infty, \mu)$ con $\mu < 0$. Por tanto, $\mu \geq 0$, lo que termina la segunda etapa de la demostración. Es decir, hemos probado que $v \leq v_\lambda$ en Σ_λ para todo $\lambda < 0$, y $u(y/|y|^2) \leq (|y_\lambda|/|y|)^2 u(y_\lambda/|y_\lambda|^2) < u(y_\lambda/|y_\lambda|^2)$, entonces u es no decreciente en la dirección x_1 en $\mathbb{R}_+^N \cap \{x_1 < 0\}$.

Por este método no podemos continuar más allá de $x_1 = 0$, esencialmente, debido a la singularidad de la transformación de Kelvin en el origen.

Etapas 3. En esta etapa probamos la monotonía en la dirección del eje x_1 en todo \mathbb{R}_+^N . Usamos estimaciones de Damascelli-Gladiali en [53] basadas en desigualdades integrales establecidas por S. Terracini en [121] y [122]. Por tanto, hacemos un resumen de esta etapa (véase [53] para más detalles).

Comenzamos enunciando un lema que será útil.

Lema 1.2.2 Sean $\lambda < 0$, $\mu \in (0, -\frac{1}{2\lambda})$ y $v^\mu(y) = \frac{1}{|y|^{N-2}} u\left(P^\mu + \frac{y}{|y|^2}\right)$, la transformación de Kelvin centrada en $P^\mu = (\mu, 0, \dots, 0)$. Supongamos que $v^\mu, (v^\mu - v_\lambda^+) \in L^{2^*} \cap L^\infty(\Sigma_\lambda)$ y $(v^\mu - v_\lambda^+) \in W^{1,2}(\Sigma_\lambda)$. Denotemos el conjunto $A_\lambda^\mu = \{y \in \Sigma_\lambda \setminus \{P_\lambda\} \mid v^\mu(y) \geq v_\lambda^\mu(y)\}$, $P_\lambda = (2\lambda, 0, \dots, 0)$. Entonces

$$\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v^\mu - v_\lambda^\mu)^+|^2 dy \leq C_\lambda \left(\int_{A_\lambda^\mu} \frac{1}{|y|^{2N}} dy \right)^{2/N} \left(\int_{\Sigma_\lambda} |\nabla(v^\mu - v_\lambda^\mu)^+|^2 dy \right) \quad (1.10)$$

donde $C_\lambda \equiv C(N, \lambda) > 0$ es no creciente en λ .

La demostración está basada en el uso de funciones de corte adecuadas como en [122], véase [53] para una demostración.

Sea $\mu \geq 0$, la transformación de Kelvin de u centrada en $P_\mu = (\mu, 0, \dots, 0)$ está definida por $v^\mu(y) = \frac{1}{|y|^{N-2}} u\left(P_\mu + \frac{y}{|y|^2}\right)$ y verifica una condición de contorno de tipo Dirichlet homogénea en los puntos y tales que $y_N = 0$, $-\frac{1}{\mu} < y_1 < 0$ ($y_1 < 0$ si $\mu = 0$ como en el segundo paso) y de tipo Neumann homogénea en la parte restante de la frontera. Si $-\frac{1}{2\mu} < \lambda < 0$ entonces v^μ y $(v^\mu - v_\lambda^\mu)^+$ se anulan donde se verifica la condición de Dirichlet para v^μ y la reflejada v_λ^μ . El Lema 1.2.2 nos da la siguiente estimación (1.10); fijado $\lambda < 0$, la estimación (1.10) se verifica para cada $\mu \in (0, -\frac{1}{2\lambda})$. Por el Principio del Máximo, $v_\lambda > v$ en $\Sigma_\lambda \setminus \{P_\lambda\}$, además, puesto que $1/|y|^{2N} \in L^1(\Sigma_\lambda)$ podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada, entonces $|y|^{-2N} \chi_{A_\lambda^\mu} \rightarrow 0$ cuando $\mu \rightarrow 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus (T_\lambda \cup \{P_\lambda\})$. Como consecuencia,

$$C_\lambda \left(\int_{A_\lambda^\mu} \frac{1}{|y|^{2N}} dy \right)^{2/N} < 1 \quad \text{para } \mu > 0 \text{ pequeño,}$$

este hecho junto con la desigualdad (1.10) prueba que $(v^\mu - v_\lambda^\mu)^+ \equiv 0$ en Σ_λ .

Ahora argumentamos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que $\mu_0 < -\frac{1}{2\lambda}$ es maximal tal que $v^\mu \leq v_\lambda^\mu$ en $\Sigma_\lambda \setminus \{P_\lambda\}$ para todo $0 < \mu < \mu_0$. Como antes, $v_\lambda^{\mu_0} > v^{\mu_0}$,

además $|y|^{-2N} \chi_{A_\lambda^\mu} \leq |y|^{-2N} \chi_{\Sigma_\lambda} \in L^1$, y de nuevo por el Teorema de la Convergencia Dominada, $|y|^{-2N} \chi_{A_\lambda^\mu} \rightarrow 0$ en c.t.p. cuando $\mu \rightarrow \mu_0$, entonces existe $0 < \varepsilon$ pequeño tal que $C_\lambda \left(\int_{A_\lambda^\mu} \frac{1}{|y|^{2N}} dy \right)^{2/N} < 1$ para $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \varepsilon)$, asimismo concluimos que $v_\lambda^\mu \geq v^\mu$ y por el Principio del Máximo $v_\lambda^\mu > v^\mu$ en $\Sigma_\lambda \setminus \{P_\lambda\}$ para $\mu > \mu_0$ y próximo a μ_0 lo que nos da una contradicción con la maximalidad de μ_0 . Por tanto tenemos que para cada $\lambda < 0$ y $\mu < -\frac{1}{2\lambda}$, $v^\mu \leq v_\lambda^\mu$ en Σ_λ o equivalentemente, fijado $\mu > 0$, la desigualdad se verifica para cada λ con $-\frac{1}{2\mu} < \lambda < 0$. Haciendo $\lambda \rightarrow 0$, obtenemos que $v^\mu \leq v_0^\mu$ en Σ_0 , es decir, $v^\mu(y_1, y') \leq v(-y_1, y') \forall y = (y_1, y')$ con $y_1 < 0$. Entonces como antes $u \leq u_\mu$ en Σ_μ , y como $\mu > 0$ es arbitrario, obtenemos que u es no decreciente en la dirección x_1 en todo \mathbb{R}_+^N .

■

1.3 Estimaciones uniformes en L^∞ : demostración de los Teoremas 1.1.3 y 1.1.5

Comenzamos esta sección demostrando el Teorema 1.1.3 con la condición de compacidad que da el Teorema 1.1.6.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1.3.

Supongamos por contradicción que existe una sucesión $\{u_k\}$ de soluciones para los problemas (P_{λ_k}) y una sucesión de puntos $\{P_k\} \subset \overline{\Omega}$ verificando

$$M_k = \sup_{x \in \Omega} u_k(x) = u_k(P_k) \longrightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para alguna subsucesión, $P_k \rightarrow P \in \overline{\Omega}$. Por consiguiente tenemos varios casos a estudiar:

1. $P \in \Omega \cup \Sigma_1$,
2. $P \in \Sigma_2$,
3. $P \in \Gamma = \overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2$.

En el primer caso, podemos argumentar como Gidas-Spruck en [74], es decir, pasando al límite llegamos a un problema de Dirichlet en \mathbb{R}_+^N o a un problema elíptico en \mathbb{R}^N y por [74] obtenemos una contradicción.

Si $P \in \Sigma_2$, con argumentos similares a los de Lin-Ni-Takagi en [91], llegamos a un problema de Neumann en \mathbb{R}_+^N o a un problema elíptico en \mathbb{R}^N . En la primera alternativa, podemos reflejar a través del hiperplano que separa el medio espacio, resultando así un problema ahora en \mathbb{R}^N , y llegamos a contradicción usando de nuevo los resultados de [74].

Dado que el caso $P \in \Sigma_2$ es menos conocido que el primero, hacemos la prueba, no solo por completar, sino porque la notación de este caso resulta útil para la exposición en el caso en que $P \in \Gamma$.

En primer lugar podemos suponer que P es el origen y $(0, \dots, 0, -1)$ es la derivada normal exterior a $\partial\Omega$ en P . Entonces existe una función suave $\psi(x')$ con $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ definida por:

- (i) $\psi(0) = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(0) = 0$, para $i = 1, \dots, N-1$.
- (ii) $\Omega \cap U = \{(x', x_N) \mid x_N > \psi(x')\}$ y $\partial\Omega \cap U = \{(x', x_N) \mid x_N = \psi(x')\}$ en un entorno U de P .

Para $y \in \mathbb{R}^N$ con $|y|$ suficientemente pequeño definimos una aplicación $x = \phi(y) = (\phi_1(y), \dots, \phi_N(y))$ por $\phi_j(y) = y_j - y_N \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \right)(y')$ para $j = 1, \dots, N-1$ y $\phi_N(y) = y_N + \psi(y')$. Debido a la propiedad (ii) $D\phi(0) = I$, ϕ tiene aplicación inversa $y = \varphi(x) = \phi^{-1}(x)$ en un entorno de $x = 0$. Escribimos $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))$. La función $v^k(y) = u_k(x)$ verifica el problema

$$\begin{cases} - \left(\sum_{i,j} a_{ij}(y) v_{y_i y_j}^k + \sum_j b_j(y) v_{y_j}^k \right) &= \lambda_k v_k^q + v_k^r \text{ en } B_{2\delta}^+, \\ v^k &= 0 \text{ sobre } \Sigma'_{1,\delta}, \\ \frac{\partial v^k}{\partial y_N} &= 0 \text{ sobre } \Sigma'_{2,\delta}, \end{cases} \quad (1.11)$$

donde $B_{2\delta} = \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y| < 2\delta\}$ y $B_{2\delta}^+ = B_{2\delta} \cap \{y_N > 0\}$, con $\delta > 0$ suficientemente pequeño, y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\Sigma'_{i,\delta}$ (los transformados de Σ_i para $i = 1, 2$ a través de la rectificación de la frontera) están dados por $\{y_1 < 0\}$, $\{y_1 > 0\}$ respectivamente en $\{y_N = 0\} \cap B_{2\delta}$ (si no es así, podemos tomar otra rectificación de Γ en $\{y_N = 0\}$ teniendo propiedades análogas). Los coeficientes son

$$a_{ij}(y) = \sum_k \varphi_{ix_k}(\phi(y)) \varphi_{jx_k}(\phi(y)), \quad b_j(y) = (\Delta_x \varphi_j)(\phi(y)).$$

Además, ponemos $Q_k = \varphi(P_k)$ y escribimos $Q_k = (q'_k, \gamma_k)$, $\gamma_k \geq 0$.

Como $Q_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, podemos suponer que $|Q_k| < \delta$. Definimos $\mu_k = M_k^{-\frac{r-1}{2}}$, entonces $\mu_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Como consecuencia, tenemos dos casos con $P \in \Sigma_2$:

- (a) $\left\{ \frac{\gamma_k}{\mu_k} \right\}$ permanece acotado.

Razonando sobre una subsucesión, si es necesario, podemos suponer $\gamma_k/\mu_k \rightarrow s \geq 0$ para $k \rightarrow \infty$. Definimos la función reescalada

$$\omega_k(z) = \frac{v^k(\mu_k z' + q'_k, \mu_k z_N)}{M_k}.$$

Notamos que la función ω_k está bien definida en la media bola B_{δ/μ_k}^+ y que $0 < \omega_k(z) \leq 1$ para todo k , además ω_k verifica el problema

$$\begin{cases} - \left(\sum_{i,j} a_{ij}^k(z) \omega_{z_i z_j}^k + \mu_k \sum_j b_j^k(z) \omega_{z_j}^k \right) = \lambda_k \omega_k^q M_k^{q-r} + \omega_k^r \text{ en } B_{\delta/\mu_k}^+, \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial z_N} = 0 \text{ sobre } \{z_N = 0\} \cap B_{\delta/\mu_k}, \end{cases} \quad (1.12)$$

donde $a_{ij}^k(z) = a_{ij}(\mu_k z' + q'_k, \mu_k z_N)$ y $b_j^k(z) = b_j(\mu_k z' + q'_k, \mu_k z_N)$.

Por regularidad elíptica clásica y el Teorema de Ascoli-Arzelá, tenemos que existe una subsucesión $\{\omega_k\}$ uniformemente convergente a una función $\omega \in C^{2,\beta}(\mathbb{R}^N) \cap C^{1,\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ para algún $0 < \beta < 1$ sobre cada subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{R}_+^N}$. Teniendo en cuenta que $a_{ij}^k(z) \rightarrow a_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $\mu_k \rightarrow 0$, concluimos que ω es una solución no negativa del problema

$$\begin{cases} -\Delta \omega = \omega^r \text{ en } \mathbb{R}_+^N, \\ \frac{\partial \omega}{\partial z_N} = 0 \text{ sobre } \{z_N = 0\}. \end{cases}$$

Finalmente extendemos ω a todo \mathbb{R}^N por reflexión con respecto al hiperplano $z_N = 0$, entonces $\omega \equiv 0$ por el Teorema 1.2 de [74]. Este hecho es una contradicción con la continuidad de ω porque

$$\omega(0, \dots, 0, s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega\left(0, \dots, 0, \frac{\gamma_k}{\mu_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_k(Q_k)}{M_k} = 1.$$

(b) $\left\{ \frac{\gamma_k}{\mu_k} \right\}$ es no acotado.

Podemos suponer que $\frac{\gamma_k}{\mu_k} \rightarrow \infty$ para $k \rightarrow \infty$. En este caso definimos

$$\omega_k(z) = \frac{v_k(\mu_k z + Q_k)}{M_k}$$

entonces $\omega_k(0) = 1$, para todo k . Ahora ω_k satisface (1.12) con $a_{ij}^k(z) = a_{ij}(\mu_k z + Q_k)$ y $b_j^k(z) = b_j(\mu_k z + Q_k)$ en $B_{\delta/\mu_k} \cap \{z_N > -\gamma_k/\mu_k\}$ y la condición de contorno está

dada por $\{z_N = -\gamma_k/\mu_k\} \cap B_{\delta/\mu_k}$. Como antes, por regularidad elíptica y el Teorema de Ascoli-Arzelá, existe una subsucesión $\{\omega_k\}$ uniformemente convergente sobre cada conjunto compacto de \mathbb{R}^N a una función $\omega \in \mathcal{C}^{2,\beta}$. Además ω es una solución no negativa de la ecuación

$$-\Delta\omega = \omega^r \text{ en } \mathbb{R}^N,$$

que implica que $\omega \equiv 0$ y esto es de nuevo una contradicción porque

$$\omega(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k(0) = 1.$$

En el tercer caso, $P \in \Gamma = \overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2$, podemos argumentar como antes y tenemos dos nuevas alternativas:

1. Si $\left\{\frac{\gamma_k}{\mu_k}\right\}$ es no acotado, la demostración es similar al caso anterior porque pasando al límite la condición de contorno “va a infinito” y llegamos a un problema en todo \mathbb{R}^N .
2. Si $\left\{\frac{\gamma_k}{\mu_k}\right\}$ es acotado, podemos suponer, para alguna subsucesión si es necesario que $\frac{\gamma_k}{\mu_k} \rightarrow s \geq 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

La función reescalada

$$\omega_k(z) = \frac{v_k(\mu_k z + Q_k)}{M_k},$$

definida antes verifica $\omega_k(0) = 1$, para todo k , además, teniendo en cuenta (1.11) obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left(\sum_{ij} a_{ij}^k \omega_{z_i z_j}^k + \mu_k \sum_j b_j^k \omega_{z_j}^k \right) = \lambda_k \omega_k^q M_k^{q-r} + \omega_k^r \text{ en } \left\{ z_N > -\frac{\gamma_k}{\mu_k} \right\} \cap B_{\frac{\delta}{\mu_k}}, \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial z_N} = 0 \text{ sobre } \left\{ z_N = -\frac{\gamma_k}{\mu_k} \right\} \cap \left\{ z_1 > -\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k} \right\} \cap B_{\frac{\delta}{\mu_k}}, \\ \omega_k = 0 \text{ sobre } \left\{ z_N = -\frac{\gamma_k}{\mu_k} \right\} \cap \left\{ z_1 < -\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k} \right\} \cap B_{\frac{\delta}{\mu_k}}, \end{array} \right.$$

para algún $\delta > 0$.

Tenemos dos casos más:

- i) $\{q_k^{(1)}/\mu_k\}$ es no acotado, entonces por regularidad elíptica obtenemos la regularidad necesaria para pasar al límite uniformemente sobre compactos de $\overline{\mathbb{R}_+^N}$ para $k \rightarrow \infty$. En el límite obtenemos una función no negativa $\omega \in \mathcal{C}^{2,\beta}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ para algún

$0 < \beta < 1$ sobre cada subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{R}_+^N}$, que es solución en \mathbb{R}_+^N de un problema de Dirichlet o de Neumann, dependiendo del signo que tenga $\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k}$ en el límite.

- ii) $\{q_k^{(1)}/\mu_k\}$ es acotado, podemos suponer $\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k} \rightarrow s_1$ para $k \rightarrow \infty$. Para pasar al límite, observamos que necesitamos, como en el último caso, algunas estimaciones a priori para obtener convergencia en algún sentido. Estas están garantizadas por el Teorema 1.1.6, en efecto, por un lado, $\|\omega_k\|_\infty = 1$, por otro, fijamos Ω_0 un entorno acotado del punto $(-s_1, 0, \dots, 0, -s)$ en el semiplano $S \equiv \{z_N > -s\}$ y K un compacto de $S \setminus \Omega_0$ con $\text{dist}(K, \Gamma) > 0$, entonces, tenemos que $\{\omega_k\}$ converge uniformemente en $C^{1,\kappa}(K) \cap C^\kappa(\overline{\Omega}_0)$ para algún $0 < \kappa < 1/2$. Ahora bien, por el Teorema Ascoli-Arzelá existe una subsucesión tal que podemos pasar al límite uniformemente sobre compactos de \overline{S} . Como anteriormente, obtenemos una solución no negativa del problema

$$(P_0) \equiv \begin{cases} -\Delta \omega = \omega^r, & \text{en } \{z_N > -s\}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial z_N} = 0, & \text{sobre } \{z_N = -s\} \cap \{z_1 > -s_1\}, \\ \omega = 0, & \text{sobre } \{z_N = -s\} \cap \{z_1 < -s_1\}, \end{cases}$$

con $0 \leq \omega(x) \leq \omega(0) = 1$, entonces por el Teorema 1.1.4 obtenemos una contradicción con el Lema de Hopf o la continuidad (ello depende del signo de s_1 y s) en el origen, el punto de máximo de ω .

En efecto, si $s = 0$ y $s_1 \leq 0$, entonces llegamos a contradicción con la continuidad de ω , porque ω alcanza el máximo en Σ_1 .

Si $s > 0$, $s_1 \leq 0$, tenemos una contradicción con el Lema de Hopf en el punto de máximo. Para verlo, es suficiente con aplicar el resultado de monotonía de las soluciones de (P_0) hasta $x_1 \leq 0$.

En los casos previos, el Paso 3 del Teorema 1.1.4 es innecesario. Sin embargo, si $s_1 > 0$, necesitamos aplicar la propiedad de monotonía de ω en la dirección x_1 en todo \mathbb{R}_+^N . Por consiguiente, argumentamos como antes dependiendo de si $s = 0$ ó de si $s > 0$.

■

A continuación, demostramos el Teorema 1.1.5 por técnicas similares a las de la demostración del Teorema 1.1.3, donde la estimación uniforme del Corolario 1.1.7 es la que nos garantiza la compacidad. Recordemos que para obtener estas estimaciones, se usan las hipótesis (B1), (B2), (B3) y el hecho que $\alpha \in I_\epsilon$, definido en la Introducción.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1.5.

Argumentamos por contradicción, es decir, suponemos que existe una sucesión de soluciones $\{u_\alpha\}$ para cada problema $(P_{\lambda,\alpha})$, una sucesión de puntos $\{P_\alpha\} \subset \overline{\Omega}$ y una sucesión

de números $\mu_\alpha = M_\alpha^{-\frac{r-1}{2}}$ tales que

$$M_\alpha = u_\alpha(P_\alpha) = \sup_{x \in \Omega} u_\alpha(x) \rightarrow \infty \text{ para } \alpha \rightarrow \bar{\alpha}$$

para algún $\bar{\alpha} \in I_\varepsilon$.

Como en la demostración del Teorema 1.1.3, tenemos tres casos a estudiar en función de la posición del punto P , el límite (cuando $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$) de los puntos de máximo P_α para cada u_α

1. $P \in \Omega \cup \Sigma_1(\bar{\alpha})$,
2. $P \in \Sigma_2$,
3. $P \in \Gamma(\bar{\alpha}) = \bar{\Sigma}_1(\bar{\alpha}) \cap \bar{\Sigma}_2(\bar{\alpha})$.

El primer caso es similar al del Teorema 1.1.3 usando los argumentos de [74]. Lo mismo ocurre en el segundo caso, usando [91] como en el Teorema 1.1.3. La diferencia está en el tercer caso. Argumentando como en el Teorema 1.1.3 tenemos dos casos más a estudiar.

Si $\frac{\gamma_\alpha}{\mu_\alpha}$ es no acotado (recordamos que γ_α está definida como en la demostración del Teorema

1.1.3), la demostración es la misma que la del Teorema 1.1.3. Si $\frac{\gamma_\alpha}{\mu_\alpha}$ es acotado, podemos

suponer que para alguna subsucesión $\frac{\gamma_\alpha}{\mu_\alpha} \rightarrow s \geq 0$ para $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$. En el límite, llegamos a un problema elíptico en \mathbb{R}_+^N si $s = 0$ y en $\mathbb{R}^N \cap \{z_N > -s\}$ si $s > 0$. Teniendo en cuenta que $\bar{\alpha} \geq \varepsilon > 0$ y las hipótesis (B1), (B2) y (B3), podemos usar el Corolario 1.1.7, con lo que las condiciones de contorno son las mismas que las del Teorema 1.1.3. Para terminar la demostración argumentamos de la misma forma que en el Teorema 1.1.3. ■

1.4 Convergencia del primer autovalor

Consideremos el problema de autovalores

$$(EP_\alpha) \equiv \begin{cases} -\Delta u &= \lambda_1(\alpha)u, \text{ en } \Omega, \\ u &= 0, \text{ sobre } \Sigma_1(\alpha), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \text{ sobre } \Sigma_2(\alpha), \end{cases}$$

y supongamos las hipótesis (1.1) y (1.2). Además, supondremos que se verifica una de las siguientes hipótesis:

(H1) $\Sigma_1(\alpha_1) \subset \Sigma_1(\alpha_2)$ para $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Sigma_1(\alpha) = \mathcal{C}_1 \subset \partial\Omega$ con $\text{cap}(\mathcal{C}_1) = 0$.

(H2) $\Sigma_2(\alpha_1) \subset \Sigma_2(\alpha_2)$ para $\alpha_1 > \alpha_2$ y $\lim_{\alpha \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)} \Sigma_2(\alpha) = \mathcal{C}_2 \subset \partial\Omega$ con $\text{cap}(\mathcal{C}_2) = 0$,

donde $\text{cap}(E)$ denota la 2-capacidad del conjunto E definida por

$$\text{cap}(E) = \inf_{\varphi \in K^2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(x)|^2 dx \mid E \subset \{\varphi \geq 1\}^o \right\}$$

donde $K^2 = \{\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \geq 0, \varphi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \nabla \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)\}$.

A lo largo de esta sección probamos la convergencia de las sucesiones $\{u_\alpha\}$ y $\{\lambda_1(\alpha)\}$, donde u_α es solución positiva y normalizada del problema ($\|u_\alpha\|_{L^2(\Omega)} = 1$) (EP_α), siendo $\lambda_1(\alpha)$ el primer autovalor asociado a dicho problema. Más precisamente, probamos convergencia fuerte de $\{u_\alpha\}$ a una autofunción del Problema de Neumann y además que $\lambda_1(\alpha) \rightarrow 0$ (cuando $\alpha \rightarrow 0$), el primer autovalor del Problema de Neumann.

Teorema 1.4.1 *Sea u_α una solución positiva (negativa) y normalizada ($\|u_\alpha\|_{L^2(\Omega)} = 1$) del problema (EP_α) y supongamos las hipótesis (1.1), (1.2) y (H1). Entonces la sucesión $\{u_\alpha\}$ converge fuertemente en $W^{1,2}(\Omega)$ a una autofunción positiva (negativa) y normalizada (en $L^2(\Omega)$) del Problema de Neumann. Como consecuencia obtenemos que*

$$\lambda_1(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

Demostración. En primer lugar, probamos la convergencia fuerte en $W^{1,2}(\Omega)$ para alguna subsucesión. Multiplicando por u_α en la ecuación $-\Delta u_\alpha = \lambda_1(\alpha)u_\alpha$ e integrando por partes

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\alpha|^2 dx = \lambda_1(\alpha) \int_{\Omega} u_\alpha^2 dx = \lambda_1(\alpha) \leq \lambda_1^D,$$

donde λ_1^D denota el primer autovalor del Problema de Dirichlet y la última desigualdad es consecuencia de la definición del primer autovalor a través del cociente de Rayleigh:

$$\lambda_1(\alpha) = \inf_{u \in E_{\Sigma_1}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}. \quad (1.13)$$

Recordemos que $E_{\Sigma_1}(\Omega)$ está definido en (1.3). Como consecuencia, existe una subsucesión $\{u_{\alpha_k}\}$, la cual notamos por $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, que es débilmente convergente a alguna función positiva (negativa) $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ con $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Además podemos suponer que

$$\begin{aligned} \nabla u_k &\rightharpoonup \nabla u_0 \quad \text{débilmente en } L^2(\Omega), \\ u_k &\rightarrow u_0 \quad \text{fuertemente en } L^2(\Omega), \\ u_k &\rightarrow u_0 \quad \text{en c.t.p. de } \Omega. \end{aligned}$$

Tomamos $\alpha_m \leq \alpha_n$; por la hipótesis **(H1)** tenemos que $\Sigma_1(\alpha_m) \subseteq \Sigma_1(\alpha_n)$ y consecuentemente $\Sigma_2(\alpha_m) \supseteq \Sigma_2(\alpha_n)$, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u_n)|^2 dx &= \int_{\Omega} [|\nabla u_m|^2 + |\nabla u_n|^2 - 2\langle \nabla u_m, \nabla u_n \rangle] dx \\ &= \int_{\Omega} [\lambda_1(m)u_m^2 + \lambda_1(n)u_n^2 - 2\lambda_1(m)u_m u_n] dx. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Además, si consideramos $\alpha_1 < \alpha_2$, para φ_1, φ_2 autofunciones positivas asociadas a α_1, α_2 respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} &\lambda_1(\alpha_1) \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 dx + \int_{\Sigma_1(\alpha_1) \cap \Sigma_2(\alpha_2)} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} d\sigma(x) \\ &= \lambda_1(\alpha_2) \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 dx + \int_{\Sigma_1(\alpha_2) \cap \Sigma_2(\alpha_1)} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} d\sigma(x), \end{aligned}$$

ahora por **(H1)** y el Lema de Hopf llegamos a

$$(\lambda_1(\alpha_1) - \lambda_1(\alpha_2)) \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 dx = \int_{\Sigma_1(\alpha_2) \cap \Sigma_2(\alpha_1)} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} d\sigma(x) < 0$$

de donde concluimos que $\lambda_1(\alpha_1) < \lambda_1(\alpha_2)$. Entonces $\lambda_1(\alpha) \searrow \lambda_1^0 \geq 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0$. Teniendo en cuenta la identidad (1.14), que u_m converge fuertemente en $L^2(\Omega)$, la convergencia de $\lambda_1(\alpha)$ y la monotonía estricta tenemos que $\{u_\alpha\}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{1,2}(\Omega)$, de donde concluimos que converge fuertemente en $W^{1,2}(\Omega)$, y el límite, por unicidad del mismo, es u_0 .

Se verifica por tanto que u_0 satisface la identidad

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle dx = \lambda_1^0 \int_{\Omega} u_0 \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\sigma(x) \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Además, teniendo en cuenta que $\text{cap}\left(\bigcap_{\alpha} \Sigma_1(\alpha)\right) = 0$ y $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega \setminus \left(\bigcap_{\alpha} \Sigma_1(\alpha)\right)$, podemos tomar para cada $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ un elemento $\tilde{\varphi}$ en la misma clase de equivalencia con $\tilde{\varphi} = 0$ sobre $\bigcap_{\alpha} \Sigma_1(\alpha)$. Entonces u_0 satisface

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle dx = \lambda_1^0 \int_{\Omega} u_0 \varphi dx \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Como consecuencia tenemos que u_0 es una solución positiva (negativa) del Problema de autovalores de Neumann con $\lambda_1^0 \geq 0$. Por consiguiente, λ_1^0 es el primer autovalor, es decir,

$\lambda_1^0 \equiv 0$ y $u_0 \equiv \text{cte}$ en c.t.p. de Ω . Finalmente, concluimos la convergencia de toda la sucesión porque $\|\nabla u_\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_1(\alpha) \searrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0$.

■

Bajo la hipótesis **(H2)**, obtenemos un resultado análogo al anterior pero para el Problema de Dirichlet.

Teorema 1.4.2 *Sea u_α una autofunción positiva (negativa) normalizada en $L^2(\Omega)$ del problema (EP_α) y supongamos las hipótesis (1.1), (1.2) y **(H2)**. Entonces la sucesión $\{u_\alpha\}$ converge fuertemente en $W^{1,2}(\Omega)$ a una autofunción positiva (negativa) y normalizada en $L^2(\Omega)$ del Problema de Dirichlet. Como consecuencia,*

$$\lambda_1(\alpha) \longrightarrow \lambda_1^D \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega),$$

donde recordamos que λ_1^D es el primer autovalor del Problema de Dirichlet.

Demostración. Multiplicando por u_α en la ecuación $-\Delta u_\alpha = \lambda_1(\alpha)u_\alpha$ e integrando por partes obtenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\alpha|^2 dx = \lambda_1(\alpha) \int_{\Omega} |u_\alpha|^2 dx \leq \lambda_1^D,$$

donde la última desigualdad se debe a (1.13). Entonces, podemos extraer una subsucesión $\{u_{\alpha_k}\}_{k=1}^\infty$ débilmente convergente en $W^{1,2}(\Omega)$. De manera similar al Teorema 1.4.1 pero usando **(H2)** en este caso, probamos, en primer lugar, la convergencia fuerte en $W^{1,2}(\Omega)$ para una subsucesión, o lo que es lo mismo, existe una función $u^0 \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$u_k \rightarrow u^0 \quad \text{fuertemente en } W^{1,2}(\Omega) \quad \text{para } \alpha_k \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega),$$

y existe λ_1^0 tal que $\lambda_1(k) \rightarrow \lambda_1^0$, con $u^0 > 0$ y $\lambda_1^0 \leq \lambda_1^D$, entonces dado que λ_1^0 es autovalor, necesariamente es $\lambda_1^0 \equiv \lambda_1^D$.

Finalmente demostramos que converge la sucesión completa. Basta argumentar por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe una subsucesión que no converge, como antes, podemos extraer una nueva subsucesión convergente a u_0 y λ_1^D , con lo que concluimos.

■

Por último, describimos el comportamiento asintótico de $\lambda_1(\alpha)$ en el Teorema 1.4.1 cuando $\alpha \rightarrow 0$, $N \geq 4$ y suponiendo la hipótesis extra,

(H3) Σ_1 es conexo, $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) = \alpha$, y $\text{diam}(\Sigma_1(\alpha)) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq C \frac{\left[1 - \varepsilon^2 \left(1 - O\left(\alpha^{\frac{2}{N-1}}\right)\right)\right]^{\frac{N+1}{2}}}{\alpha^{2\mu}} = C \frac{\left[(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 O\left(\alpha^{\frac{2}{N-1}}\right)\right]^{\frac{N+1}{2}}}{\alpha^{2\mu}} \\
&= C \frac{O\left(\alpha^{\mu \frac{N+1}{2}}\right) + O\left(\alpha^{\frac{N+1}{N-1}}\right)}{\alpha^{2\mu}},
\end{aligned}$$

donde el μ optimal es $\mu = \frac{2}{N-1}$, y obtenemos que $\lambda_1(\alpha) \leq O(\alpha^{\bar{\mu}})$ con $\bar{\mu} = \frac{N-3}{N-1}$. ■

Observación 1.4.4 En el ejemplo anterior podemos suponer que $\Sigma_1(\alpha)$ tenga un número finito de componentes conexas, siempre y cuando la hipótesis de convergencia en diámetro se verifique para cada componente conexa.

Bajo hipótesis adecuadas, podemos dar una estimación inferior del primer autovalor $\lambda_1(\alpha)$, para demostrarlo, utilizaremos el resultado que sigue, ver [75] ó [117].

Lema 1.4.5 Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y estrictamente convexo. Fijado $x_0 \in \Omega$, denotamos S_0 el mínimo subconjunto abierto de S^{N-1} (la esfera unidad en \mathbb{R}^N) tal que $\forall y \in \Sigma_1$, $\exists \omega_y \in S_0$ y $r_y > 0$ verificando $y = x_0 + r_y \omega_y$. Definamos $\Omega_0 = \Omega \cap \{x_0 + r\omega \mid r > 0, \omega \in S_0\}$. Dada $u \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ tenemos la representación

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_0|} \int_{\Omega_0} \frac{\langle \nabla u(y), x_0 - y \rangle}{|x_0 - y|^N} dy. \quad (1.16)$$

Demostración. Sea $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap \{u = 0 \text{ sobre } \Sigma_1\}$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$u(x_0) = - \int_0^\infty u_r(x_0 + r\omega) dr,$$

integrando en S_0 obtenemos

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= - \frac{1}{\mathcal{H}_{N-1}(S_0)} \int_{S_0} \int_0^\infty u_r(x_0 + r\omega) dr d\omega \\
&= \frac{1}{\mathcal{H}_{N-1}(S_0)} \int_{\Omega_0} \frac{\langle \nabla u(y), x_0 - y \rangle}{|x_0 - y|^N} dy.
\end{aligned}$$

Finalmente, por densidad tenemos el resultado $\forall u \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$. ■

Observación 1.4.6 *Por la convexidad estricta del dominio, existen dos constantes positivas c_1, c_2 tales que para cada $x_0 \in \Omega$, el subconjunto asociado S_0 verifica*

$$c_1 \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1) \leq \mathcal{H}_{N-1}(S_0) \leq c_2 \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1).$$

Lema 1.4.7 *En las hipótesis del Lema 1.4.5, existe una constante $c(N, \Omega) > 0$ tal que*

$$\lambda_1(\alpha) = \inf_{v \in E_{\Sigma_1}(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx} \geq c\alpha^2. \quad (1.17)$$

Demostración. Tomemos $\mu \in (0, 1]$. El potencial de Riesz \mathcal{V}_{μ} está definido para funciones de $L^1(\Omega)$ por

$$(\mathcal{V}_{\mu} f)(x) = \int_{\Omega} |x - y|^{N(\mu-1)} f(y) dy.$$

Además, se verifica que $\mathcal{V}_{\mu} : L^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$.

Tomemos $\mu = \frac{1}{N}$ y definamos $h(x, y) = |x - y|^{1-N}$, si fijamos una variable observamos que $h \in L^r(\Omega)$, para $r < \frac{N}{N-1}$. Tomamos R tal que $|\Omega| = |B_R| = \omega_N R^N$, entonces vemos que

$$\int_{\Omega} h(x, y) dy \leq \int_{B_R(x)} |x - y|^{1-N} dy = N\omega_N \int_0^R \rho^{1-N+N-1} d\rho = N\omega_N R = N\omega_N^{\frac{N-1}{N}} |\Omega|^{\frac{1}{N}}.$$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$|(\mathcal{V}_{1/N} |\nabla u|)(x)| \leq \left(\int_{\Omega} |h(x, y)| |\nabla u(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |h(x, y)| dy \right)^{1/2}$$

e integrando sobre Ω , obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |(\mathcal{V}_{1/N} |\nabla u|)(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left[\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |h(x, y)| |\nabla u(y)|^2 dy \right) \left(\int_{\Omega} |h(x, y)| dy \right) dx \right]^{1/2} \\ &\leq N\omega_N^{\frac{N-1}{N}} |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad y (1.16) junto con la observación 1.4.6 obtenemos:

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq (c_1 \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1))^{-2} \int_{\Omega} \left(N\omega_N^{\frac{N-1}{N}} |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 dx,$$

y como consecuencia, existe una constante positiva $C \equiv C(N, |\Omega|, c_1)$ tal que $\lambda_1(\alpha) \geq C\alpha^2$. ■

1.5 Problemas cóncavo-convexos

1.5.1 Resultados preliminares

Lema 1.5.1 (Comparación) *Supongamos que f es una función continua tal que $\frac{f(s)}{s}$ es no creciente. Sean $v, u \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$ subsolución y supersolución respectivamente del problema*

$$\begin{cases} -\Delta \omega = f(\omega) & \text{en } \Omega, \\ \omega > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(\omega) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.18)$$

Entonces $v \leq u$.

La demostración es una ligera modificación de la del Lema 3.3 en [13], por lo tanto la omitimos.

Lema 1.5.2 *Sea Λ definido por*

$$\Lambda = \sup \{ \lambda > 0 \mid \text{el problema } (P_\lambda) \text{ tiene solución} \}.$$

Entonces $\Lambda < \infty$.

Demostración. Sea $\varphi_1 > 0$ una autofunción asociada al primer autovalor, es decir,

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 & \text{en } \Omega, \\ B(\varphi_1) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Integrando por partes y suponiendo que u es solución de (P_λ) obtenemos que

$$\int_{\Omega} (\lambda u^q + u^r) \varphi_1 dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} u \varphi_1 dx.$$

Es más, teniendo en cuenta que

$$\lambda t^q + t^r \geq \lambda t, \quad \forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

y que $u \geq 0$, necesariamente $\lambda \leq \lambda_1$. ■

Nota 1.5.3 Antes de continuar, señalamos las ideas del método de iteración, el cual utilizaremos habitualmente. Sea el problema

$$(P_0) \equiv \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde suponemos que f es monótona creciente en u . Supongamos que tenemos una subsolución \underline{u} y una supersolución \bar{u} de (P_0) ordenadas, es decir, $\underline{u} \leq \bar{u}$, entonces, existe una solución u_λ que se calcula como el límite de la sucesión u_n que definida por:

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} = \lambda f(u_n) & \text{en } \Omega, \\ B(u_{n+1}) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $u_1 = \underline{u}$, de esta manera, la sucesión $\{u_n\} \subset E_{\Sigma_1}^2(\Omega)$ verifica:

$$\underline{u} = u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq \bar{u}.$$

Denotamos el problema

$$(P_h) \equiv \begin{cases} -\Delta v = h & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \end{cases}$$

que utilizamos en el siguiente resultado de J. Dávila en [54].

Lema 1.5.4 Sea u una solución de (P_f) donde $f \in L^\infty(\Omega)$, $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$. Sea v la solución de (P_g) con $g \in L^p(\Omega)$ para algún $p > N$. Entonces existe una constante $C \equiv C(\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2, N, f, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{v}{u} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Para v como en el enunciado del Lema 1.5.4, definimos

$$\mathcal{C}_v(\Omega) = \left\{ \omega \in C^0(\bar{\Omega}) \cap E_{\Sigma_1}(\Omega) \mid \left\| \frac{\omega}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\}.$$

Por aplicación directa del Lema 1.5.4, con $g \equiv 1$, obtenemos los siguientes resultados.

Lema 1.5.5 Sean \underline{u} , \bar{u} subsolución y supersolución estrictas de $(P_{\alpha, \lambda})$, respectivamente, con $\underline{u} < \bar{u}$ en Ω . Sea u_0 una solución de (P_λ) con $0 < \lambda < \Lambda$, obtenida por el método

iterativo con \underline{u} (como subsolución) y \bar{u} (como supersolución). Entonces u_0 está separada de \underline{u} y \bar{u} en $C_v(\Omega)$. Precisamente, si $X = \{\omega \in C_v(\Omega) \mid \underline{u} \leq \omega \leq \bar{u}\}$ tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$u_0 + \varepsilon B_1(0) \subset X,$$

$$\text{donde } B_1(0) = \left\{ \omega \in C_v(\Omega) \mid \left\| \frac{\omega}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} < 1 \right\}.$$

Demostración. Por el Principio del Máximo, $\underline{u} < u_0 < \bar{u}$. Observamos que $\underline{v} := u_0 - \underline{u}$, satisface $-\Delta \underline{v} = f_\lambda(u_0) - f_\lambda(\underline{u})$ y $\bar{v} := \bar{u} - u_0$ verifica $-\Delta \bar{v} = f_\lambda(\bar{u}) - f_\lambda(u_0)$, en ambos casos con las mismas condiciones de frontera del Problema $(P_{\alpha,\lambda})$. Y puesto que $f_\lambda(s)$ es creciente, los segundos miembros en las ecuaciones anteriores son no negativos. Por el Lema 1.5.4 tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\underline{u}(x) + \varepsilon v(x) \leq u_0(x) \leq \bar{u}(x) - \varepsilon v(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Entonces obtenemos la conclusión de manera inmediata. ■

Como aplicación del Lema 1.5.4, podemos extender un resultado de Brezis-Nirenberg (véase [37]) a las condiciones de contorno mixtas. Éste resultado será útil en la demostración de la existencia de una segunda solución de (P_λ) para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Teorema 1.5.6 Sea $u_0 \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$ un mínimo local para el funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx - \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} |u|^{r+1} dx$$

en $C_v(\Omega)$, es decir, existe $r > 0$ tal que si v es la solución de (P_h) con $h \equiv 1$:

$$(1) \quad J(u_0) \leq J(u_0 + \omega), \quad \forall \omega \in C_v(\Omega), \quad \text{con } \left\| \frac{\omega}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r.$$

Entonces u_0 es un mínimo local de J en $E_{\Sigma_1}(\Omega)$, es decir,

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \text{tal que} \quad J(u_0) \leq J(u_0 + \omega), \quad \forall \omega \in E_{\Sigma_1}(\Omega), \quad \|\omega\|_{E_{\Sigma_1}(\Omega)} \leq \delta_0.$$

Demostración. Argumentando por contradicción, suponemos que:

$$(2) \quad \text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \omega_\varepsilon \in B_\varepsilon(u_0) \text{ tal que } J(\omega_\varepsilon) < J(u_0),$$

donde $B_\varepsilon(u_0) = \left\{ u \in E_{\Sigma_1}(\Omega) \mid \|u - u_0\|_{E_{\Sigma_1}(\Omega)} \leq \varepsilon \right\}$. Por un argumento clásico de semi-continuidad inferior, el valor mínimo de J en B_ε se alcanza; podemos suponer que lo hace

en ω_ε ; ahora queremos probar que $\omega_\varepsilon \rightarrow u_0$ en $C_v(\Omega)$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ y así llegaremos a una contradicción con (1) y (2).

La correspondiente ecuación de Euler para ω_ε involucra un multiplicador de Lagrange ρ_ε de manera que ω_ε satisface

$$\langle J'(\omega_\varepsilon), \xi \rangle_{E'_{\Sigma_1}(\Omega), E_{\Sigma_1}(\Omega)} = \rho_\varepsilon \langle \omega_\varepsilon, \xi \rangle_{E_{\Sigma_1}(\Omega)}, \quad \forall \xi \in E_{\Sigma_1}(\Omega), \quad (1.19)$$

además, por la hipótesis (2) tenemos que $\rho_\varepsilon \leq 0$ y $\rho_\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Equivalentemente a (1.19), si escribimos $h_\lambda(s) = \lambda s^q + s^r$ tenemos:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \omega_\varepsilon, \nabla \xi \rangle dx - \int_{\Omega} h_\lambda(\omega_\varepsilon) \xi dx = \rho_\varepsilon \int_{\Omega} \langle \nabla \omega_\varepsilon, \nabla \xi \rangle dx, \quad \forall \xi \in E_{\Sigma_1}(\Omega).$$

Entonces ω_ε verifica la ecuación

$$-\Delta \omega_\varepsilon = \frac{1}{(1 - \rho_\varepsilon)} h_\lambda(\omega_\varepsilon) =: h_\lambda^\varepsilon(\omega_\varepsilon).$$

Teniendo en cuenta que $q, r < \frac{N+2}{N-2}$ concluimos que existe una constante $C > 0$ tal que $\|\omega_\varepsilon\|_{E_{\Sigma_1}(\Omega)} \leq C$ para todo $\varepsilon > 0$. Además, por el Teorema 1.1.6 obtenemos que $\|\omega_\varepsilon\|_{C^\kappa} \leq C$ independientemente de ε . Ahora bien, por el Teorema de Ascoli-Arzelá existe una subsucesión, que la denotamos igual, tal que $\omega_\varepsilon \rightarrow \omega_0$ (para $\varepsilon \rightarrow 0$) uniformemente. Como $\omega_\varepsilon \rightarrow u_0$ en $E_{\Sigma_1}(\Omega)$, entonces $\omega_0 = u_0$, y por el Principio del Máximo y el Lema 1.5.4 obtenemos que

$$\left\| \frac{\omega_\varepsilon - u_0}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sup_{\Omega} |(h_\lambda^\varepsilon(\omega_\varepsilon)) - h_\lambda^0(u_0)| \rightarrow 0, \quad \text{para } \varepsilon \rightarrow 0,$$

que da una contradicción con (1) y (2). ■

1.5.2 Demostración del Teorema 1.1.2

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1.2 (I). Integrando por partes en (P_λ) con la primera autofunción φ_1 (solución del problema de autovalores con la misma condición de contorno) como función test, obtenemos que

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} u \varphi_1 dx = \int_{\Omega} u^r \varphi_1 dx,$$

entonces necesariamente $\lambda < \lambda_1$ porque el lado derecho en esta identidad es positivo. Por tanto concluimos que no hay solución del problema (P_λ) si $\lambda \geq \lambda_1$.

Por otro lado, el funcional asociado verifica

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} u^{r+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - C(N, r, \lambda_1) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{r+1}{2}} \end{aligned}$$

donde $C(N, r, \lambda_1) > 0$. Entonces, J verifica las hipótesis geométricas del Teorema del Paso de la Montaña establecido por Ambrosetti-Rabinowitz en [17]. Además, la compacidad para el mismo está garantizada debido a que el problema es subcrítico. Como consecuencia, obtenemos la existencia de al menos una solución para $0 < \lambda < \lambda_1$. El resultado de bifurcación es consecuencia de un teorema clásico de bifurcación global de Rabinowitz en [111].

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1.2 (II). Suponemos que $0 < q < 1$. La estrategia de la demostración sigue las ideas del Problema de Dirichlet tratado en [13]. Sin embargo, en los problemas mixtos, aparecen dificultades relacionadas con la regularidad y necesitamos obtener estimaciones diferentes para aplicar los procedimientos generales.

(IIa) 1. Es una consecuencia inmediata del Lema 1.5.2.

(IIa) 2. El funcional asociado al problema (P_{λ}) con $0 < q < 1$ verifica

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} u^{q+1} dx - \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} u^{r+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda C_1(q, \lambda_1, |\Omega|) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}} \\ &\quad - C_2(N, r, \lambda_1) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{r+1}{2}} \end{aligned}$$

donde las constantes $C_1(q, \lambda_1, |\Omega|)$ y $C_2(N, r, \lambda_1)$ son positivas. Entonces, para λ suficientemente pequeño, existen al menos dos soluciones, una obtenida por minimización y otra mediante el Teorema del Paso de la Montaña debido a la geometría del funcional (ver [69] para más detalles).

Por el Lema 1.5.2, $\Lambda = \sup \{ \lambda \mid (P_{\lambda}) \text{ tiene solución} \} < \infty$. Para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, existe $\mu > 0$ tal que $\Lambda - \varepsilon \leq \mu < \Lambda$ y existe u_{μ} solución para (P_{μ}) . Ahora u_{μ} es una supersolución para todo (P_{λ}) con $\lambda < \mu$. Tomemos v_{λ} la única solución del

problema $-\Delta v_\lambda = \lambda v_\lambda^q$ con las mismas condiciones de frontera. Es evidente que v_λ es una subsolución del problema (P_λ) . Además, por el Lema 1.5.1 $v_\lambda \leq u_\mu$, por tanto, por el método de iteración comenzando con v_λ existe una solución u_λ que se calcula como el límite de la sucesión u_n definida por

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} &= \lambda u_n^q + u_n^r & \text{en } \Omega, \\ B(u_{n+1}) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $u_1 = v_\lambda$, de esta manera, la sucesión $\{u_n\} \subset E_{\Sigma_1}^2(\Omega)$ verifica:

$$v_\lambda = u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq u_\mu.$$

Además, $u_\lambda \in E_{\Sigma_1}^2(\Omega)$, para todo $\lambda \in (0, \Lambda - \varepsilon)$, y como consecuencia, dado que ε es arbitrario, para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$. Más aún, esta solución es la minimal, dado que si u es otra solución de (P_λ) , ésta es también supersolución de (P_λ) , entonces se verifica que $v_\lambda \leq u$ y comenzando la iteración, de nuevo con v_λ , se comprueba por inducción que $u_n \leq u$, $\forall n \geq 1$, con lo que el límite $u_\lambda \leq u$.

La monotonía la obtenemos directamente por el lema de comparación, Lema 1.5.1.

(IIa) 3. Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de manera que $\lambda_n \nearrow \Lambda$ para $n \rightarrow \infty$, notamos por $u_n = u_{\lambda_n}$ la solución minimal para el problema (P_{λ_n}) y J_λ el funcional asociado al problema (P_λ) . Como en [13], podemos probar que la ecuación linealizada en la solución minimal tiene autovalores no negativos, entonces obtenemos de manera análoga a [13] que $J_{\lambda_n}(u_n) < 0$. Teniendo en cuenta que $J'(u_\lambda) = 0$ resulta:

$$0 > J_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{r} \langle J'_{\lambda_n}(u_n), u_n \rangle \geq c_r \|\nabla u_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)}^2 - c(\Lambda, q, r) \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^q,$$

por lo tanto existe una constante positiva k tal que $\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq k$. Como consecuencia directa de lo anterior, existe una subsucesión convergente, en sentido débil, en $E_{\Sigma_1}(\Omega)$ y teniendo en cuenta que el término de reacción es subcrítico, obtenemos una solución débil del problema (P_λ) para $\lambda = \Lambda$.

(IIa) 4. Para probar la existencia de una segunda solución, buscamos una primera como mínimo del funcional asociado J_λ . Para ello, definimos las funciones

$$f_\lambda(s) = \begin{cases} \lambda s^q + s^r & \text{si } s \geq 0, \\ 0 & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

y

$$F_\lambda(u) = \int_0^u f_\lambda(s) ds,$$

el funcional

$$\bar{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega F_\lambda(u) dx$$

y observamos que $\bar{J}_\lambda(u) = J_\lambda(u)$, si $u > 0$.

Lema 1.5.7 *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ existe una solución $u_0 \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$ que es un mínimo local del funcional \bar{J}_λ en C_v , es decir, existe una constante $r > 0$ tal que*

$$\bar{J}_\lambda(u_0) \leq \bar{J}_\lambda(u_0 + \varphi), \quad \forall \varphi \in C_v(\Omega) \text{ con } \left\| \frac{u_0 - \varphi}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq r.$$

Demostración. Fijados $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \Lambda$ consideramos las soluciones minimales $u_1 = u_{\lambda_1}$, $u_2 = u_{\lambda_2}$. Observamos que $u_1 \leq u_2$ y u_1 , u_2 son subsolución y supersolución respectivamente para el problema (P_λ) . Además,

$$\begin{aligned} -\Delta(u_2 - u_1) &= \lambda_2 u_2^q + u_2^r - (\lambda_1 u_1^q + u_1^r) \\ &\geq \lambda_1(u_2^q - u_1^q) + u_2^r - u_1^r \geq 0 \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Puesto que $u_1 \not\equiv u_2$ (dado que $\lambda_1 < \lambda_2$), por el Principio de Máximo y el Lema de Hopf, obtenemos que $u_1 < u_2$ en $\Omega \cup \Sigma_2$ y $\frac{\partial}{\partial \nu}(u_2 - u_1) < 0$ en Σ_1 , donde ν es la derivada normal unitaria exterior a la frontera $\partial\Omega$.

Ahora definimos las funciones

$$\tilde{f}_\lambda(x, s) = \begin{cases} f_\lambda(u_1(x)) & \text{si } s \leq u_1, \\ f_\lambda(s) & \text{si } u_1 < s < u_2, \\ f_\lambda(u_2(x)) & \text{si } s \geq u_2, \end{cases}$$

$$\tilde{F}_\lambda(x, s) = \int_0^s \tilde{f}_\lambda(x, t) dt$$

y el funcional

$$\tilde{J}_\lambda = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega \tilde{F}_\lambda(x, u) dx.$$

Claramente \tilde{J}_λ alcanza su mínimo global en alguna función $u \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$, que satisface

$$-\Delta u = \tilde{f}_\lambda(x, u), \quad \text{en } \Omega.$$

Como anteriormente, por el Principio del Máximo y por el Lema 1.5.5,

$$u_1(x) + \varepsilon v(x) \leq u(x) \leq u_2(x) - \varepsilon v(x) \quad \text{y} \quad u_1(x) < u(x) < u_2(x), \forall x \in \Omega \quad \text{y algún} \quad \varepsilon > 0.$$

En efecto, si tomamos $\left\| \frac{\omega - u}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tau$ con $0 < \tau < \varepsilon$, conseguimos que $u_1 \leq \omega \leq u_2$ en todo Ω . Además, $\bar{J}_\lambda(\omega) - \bar{J}_\lambda(u)$ es constante para toda función ω con $u_1 \leq \omega \leq u_2$, por lo tanto, concluimos que u_0 es un mínimo local para \bar{J}_λ en \mathcal{C}_v . ■

Fijado λ , buscamos una segunda solución de la forma $u = u_0 + \omega$, con u_0 la solución anterior (mínimo local de \bar{J}_λ en \mathcal{C}_v) y $\omega > 0$. La ecuación correspondiente para ω es

$$-\Delta \omega = \lambda(u_0 + \omega)^q - \lambda u_0^q + (u_0 + \omega)^r - u_0^r. \quad (1.20)$$

Definimos

$$g(x, s) = g_\lambda(x, s) = \begin{cases} \lambda(u_0 + \omega)^q - \lambda u_0^q + (u_0 + \omega)^r - u_0^r & \text{si } s \geq 0, \\ 0 & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

$$G(\omega) = G_\lambda(\omega) = \int_0^\omega g(x, s) ds,$$

y

$$I(\omega) = I_\lambda(\omega) = \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega G(\omega) dx.$$

Si $\omega \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$ y $\omega \neq 0$ es un punto crítico de I , entonces ω es solución de (1.20), y por el Principio del Máximo, $\omega > 0$ en Ω . Como consecuencia, $u = u_0 + \omega$ es una solución para el problema (P_λ) , además, $u \neq u_0$. Ahora, argumentamos por contradicción suponiendo que $\omega = 0$ es el único punto crítico del funcional I .

Lema 1.5.8 $\omega = 0$ es un mínimo local del funcional I en el espacio $E_{\Sigma_1}(\Omega)$.

Demostración. Notemos por ω^+ (ω^-) la parte positiva (negativa) de ω . Como

$$G(\omega^+) - F(u_0 + \omega^+) = -\frac{\lambda}{q+1} u_0^{q+1} - \lambda u_0^q \omega^+ - \frac{1}{r+1} u_0^{r+1} - u_0^r \omega^+,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 I(\omega) &= \frac{1}{2} \|\nabla \omega^+\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \omega^-\|_2^2 - \int_{\Omega} G(\omega^+) dx \\
 &= \frac{1}{2} \|\nabla \omega^+\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \omega^-\|_2^2 - \int_{\Omega} F(u_0 + \omega^+) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{q+1} u_0^{q+1} + \lambda u_0^q \omega^+ + \frac{1}{r+1} u_0^{r+1} + u_0^r \omega^+ \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \|\nabla \omega^+\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \omega^-\|_2^2 - \int_{\Omega} F(u_0 + \omega^+) dx + \int_{\Omega} F(u_0) dx + \int_{\Omega} (\lambda u_0^q + u_0^r) dx.
 \end{aligned}$$

Operando, llegamos a que

$$\begin{aligned}
 \bar{J}(\omega) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \omega^+\|_2^2 + \int_{\Omega} (\langle \nabla u_0, \nabla \omega^+ \rangle + |u_0 \omega^+|) dx - \int_{\Omega} F(u_0 + \omega^+) dx \\
 &= \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \omega^+\|_2^2 + \int_{\Omega} (\lambda u_0^q + u_0^r) \omega^+ dx - \int_{\Omega} F(u_0 + \omega^+) dx.
 \end{aligned}$$

Como consecuencia obtenemos que

$$\begin{aligned}
 I(\omega) &= \frac{1}{2} \|\nabla \omega^-\|_2^2 + \bar{J}(u_0 + \omega^+) - \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \int_{\Omega} F(u_0) dx \\
 &= \frac{1}{2} \|\nabla \omega^-\|_2^2 + \bar{J}(u_0 + \omega^+) - \bar{J}(u_0) \geq \frac{1}{2} \|\nabla \omega^-\|_2^2 \geq 0 = I(0),
 \end{aligned}$$

siempre que $\left\| \frac{\omega}{v} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$. Donde la última desigualdad es consecuencia del Lema 1.5.7. ■

FIN DE LA DEMOSTRACIÓN DEL APARTADO (IIa) 4. Una vez hemos probado que la solución minimal es un mínimo local, obtenemos la existencia de una segunda solución a través del Teorema del Paso de la Montaña como sigue. Es evidente que $I(t\omega) \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, para todo $\omega > 0$. Entonces, existe una función $\omega_1 \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$ tal que $\|\omega_1\|_{E_{\Sigma_1}(\Omega)} \gg 1$ y $I(\omega_1) < 0$. Definimos

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0, 1], E_{\Sigma_1}(\Omega)) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \omega_1 \right\}$$

y

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max \{ I(\gamma(t)) \mid t \in [0, 1] \}.$$

Hay dos casos:

1. $c > 0$, entonces por el Teorema del Paso de la Montaña de Ambrosetti-Rabinowitz en [17], encontramos otra solución.
2. $c = 0$, en este caso concluimos por la extensión del Teorema del Paso de la Montaña establecida por Ghoussoub-Preiss en [73].

(IIb). En este caso, podemos seguir la estrategia de [15]. Para ello, dado que s^q no es diferenciable en $s = 0$, consideramos la función de truncamiento $h_\delta(s) = \delta^{q-1}s$ si $0 \leq s \leq \delta$ y $h_\delta(s) = s^q$ si $s > \delta$. Definimos los problemas aproximados (P_δ) , es decir, (P_λ) con $h_\delta(u)$ en lugar de u^q . Entonces, por el Teorema clásico de Rabinowitz (ver [111]), existe un continuo S_δ de soluciones de (P_δ) bifurcando desde $(\lambda_1^\delta, 0)$ con $\lambda_1^\delta = \lambda_1 \delta / h(\delta)$, donde λ_1 es el primer autovalor del problema

$$(EP) \equiv \begin{cases} -\Delta \varphi &= \lambda_1 \varphi & \text{en } \Omega, \\ B(\varphi) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para finalizar, utilizamos un lema topológico (véase [127] para una demostración).

Lema 1.5.9 *Sea $\{\Sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos conexos en un espacio métrico E . Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:*

- i) $\bigcup \Sigma^n$ es precompacto en E ,
- ii) $\liminf \Sigma^n \neq \emptyset$.

Entonces, $\limsup \Sigma^n$ es no vacío, cerrado y conexo.

Dado $R > 0$, notamos por T_R la bola de radio R en $E = \mathbb{R} \times X$, con $X = E_{\Sigma_1}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Denotemos Σ^δ la componente conexa de $S_\delta \cap T_R$ que contiene $(\lambda_1^\delta, 0)$. Para una sucesión $\delta_n \rightarrow 0$ y $\Sigma^n = \Sigma^{\delta_n}$, tenemos que $\bigcup \Sigma^n$ es precompacto por el siguiente resultado.

Lema 1.5.10 *Sea $\{(\lambda_k, u_k)\}$ una sucesión acotada de soluciones del problema (P_δ) , entonces existe una subsucesión convergente a (λ_0, u_0) , es decir, una solución de (P_λ) con $\lambda = \lambda_0$.*

Demostración. Existe una subsucesión tal que $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$, $u_k \rightharpoonup u_0$ en $E_{\Sigma_1}(\Omega)$ y $u_k \rightarrow u_0$ uniformemente en $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (debido al Teorema 1.1.6 y al Teorema de Ascoli-Arzelá), por lo tanto, $u_k \rightarrow u_0$ en $E_{\Sigma_1}(\Omega)$ dado que

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_k - u_0)|^2 dx = \lambda_k \int_{\Omega} u_k^q (u_k - u_0) dx + \int_{\Omega} u_k^r (u_k - u_0) dx \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Teniendo en cuenta que $\lambda_1^{\delta_n} \rightarrow 0$ para $\delta_n \rightarrow 0$ tenemos que $(0, 0) \in \liminf \Sigma^n$, entonces estamos en las hipótesis del Lema 1.5.9, que aplicado a Σ^n prueba que

$$\mathcal{C}_R = \limsup \Sigma^n = \limsup (S_{\delta_n} \cap T_R) \neq \emptyset$$

es cerrado y conexo. Además es claro que \mathcal{C}_R toca a T_R para todo $R > 0$. Si denotamos $\mathcal{C} = \cup_{R>0} \mathcal{C}_R$, hemos probado que es un continuo en E con $(0, 0) \in \mathcal{C}$. Esto termina la demostración del Teorema 1.1.2. ■

Para finalizar esta subsección, establecemos un resultado sobre la existencia de infinitas soluciones para el problema

$$(\overline{P}_\lambda) \equiv \begin{cases} -\Delta u &= \lambda |u|^{q-1} u + |u|^{r-1} u & \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 1.5.11 *Dado el problema (\overline{P}_λ) , con $0 < q < 1 < r < \frac{N+2}{N-2}$ existe un $\lambda^* > 0$ tal que para $0 < \lambda < \lambda^*$, existen infinitas soluciones.*

La demostración de este teorema utiliza la Teoría de Ljusternik-Schnirelmann exactamente como en el caso del Problema de Dirichlet, estudiado en [69] (ver también [13]). Omitimos los detalles por la extensión de esta memoria.

1.5.3 Variación de las condiciones de contorno

En esta subsección, consideramos la variación de las condiciones de frontera bajo las hipótesis de la Sección 1.4.

Siguiendo las ideas de Ambrosetti-Brezis-Cerami en [13] obtenemos los siguientes resultados.

Lema 1.5.12 *Supongamos $q < 1$ y denotemos por z la única solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta z &= z^q & \text{en } \Omega, \\ z &> 0 & \text{en } \Omega, \\ B_\alpha(z) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.21)$$

Entonces, existe una constante $C \equiv C(\alpha) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} (|\nabla \varphi|^2 - q z^{q-1} \varphi^2) dx \geq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \varphi \in E_{\Sigma_1}(\Omega). \quad (1.22)$$

Demostración. Supongamos por contradicción que $\nu_1 = \lambda_1[-\Delta - qz^{q-1}] \leq 0$, donde

$$\nu_1 = \inf_{\substack{\phi \in E_{\Sigma_1}(\Omega) \\ \phi \not\equiv 0}} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 - qz^{q-1}\phi^2) dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}, \quad (1.23)$$

entonces, existe $\phi \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$, $\phi > 0$ tal que

$$-\Delta \phi - qz^{q-1}\phi = \nu_1 \phi,$$

con lo que obtenemos

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \phi, \nabla z \rangle dx = q \int_{\Omega} z^q \phi dx + \nu_1 \int_{\Omega} \phi z dx,$$

pero como z es solución de (1.21), tenemos

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \phi, \nabla z \rangle dx = \int_{\Omega} z^q \phi dx$$

y combinando las dos identidades anteriores obtenemos

$$\int_{\Omega} z^q \phi dx = q \int_{\Omega} z^q \phi dx + \nu_1 \int_{\Omega} z q dx \leq q \int_{\Omega} z^q \phi dx$$

por consiguiente, ha de verificarse que $1 \leq q$, hecho que es una contradicción por hipótesis.

Por tanto hemos probado que $\nu_1 > 0$, es decir, se verifica la desigualdad (1.22). ■

Como consecuencia del Lema 1.5.12, tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.5.13 *Existe $A > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ el problema (P_{λ}) tiene a lo más una solución verificando $\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq A$.*

Demostración. Sea $A > 0$ tal que $rA^{r-1} < \nu_1$, donde ν_1 es el autovalor definido en (1.23).

Supongamos, por contradicción, que existe otra solución del Problema (P_{λ}) , digamos $\omega = u_{\lambda} + v$ con $v \not\equiv 0$ y $\|\omega\|_{L^{\infty}} \leq A$.

Como u_{λ} es la solución minimal tenemos que $v \geq 0$ y $v \not\equiv 0$. Definimos $\eta(x) = \lambda^{\frac{1}{1-q}} z(x)$ entonces $-\Delta \eta = \lambda \eta^q$, además $-\Delta u_{\lambda} \geq \lambda u_{\lambda}^q$ y por el lema de comparación, Lema 1.5.1, con $f(t) = \lambda t^q$, $v = \eta$ y $u = u_{\lambda}$ obtenemos $u_{\lambda} \geq \eta$.

Teniendo en cuenta que ω es solución del Problema (P_{λ}) , tenemos que

$$-\Delta(u_{\lambda} + v) = \lambda(u_{\lambda} + v)^q + (u_{\lambda} + v)^r.$$

Dado que $q < 1$, se tiene $\lambda(u_\lambda + v)^q < \lambda u_\lambda^q + \lambda q u_\lambda^{q-1} v$ por tanto

$$-\Delta(u_\lambda + v) \leq \lambda u_\lambda^q + \lambda q u_\lambda^{q-1} v + (u_\lambda + v)^r$$

y esto implica que

$$-\Delta v \leq \lambda q u_\lambda^{q-1} v + (u_\lambda + v)^r - u_\lambda^r,$$

además, recordando que $z^{q-1} \geq \lambda u_\lambda^{q-1}$ obtenemos que

$$-\Delta v \leq q z^{q-1} v + (u_\lambda + v)^r - u_\lambda^r.$$

Por otro lado, como $u_\lambda + v \leq A$ tenemos que $(u_\lambda + v)^r - u_\lambda^r \leq r A^{r-1} v$, entonces

$$-\Delta v - q z^{q-1} v \leq r A^{r-1} v.$$

Multiplicando en esta ecuación por v y teniendo en cuenta que $\nu_1 > 0$ es el primer autovalor,

$$\nu_1 \int_{\Omega} v^2 dx \leq r A^{r-1} \int_{\Omega} v^2 dx,$$

sin embargo $\nu_1 > r A^{r-1}$ con lo que $v \equiv 0$, que es una contradicción. ■

Observación 1.5.14 Como consecuencia tenemos que u_λ , cerca de $\lambda = 0$, se comporta como $u_\lambda \approx \lambda^{\frac{1}{1-q}} z$.

Por las hipótesis (H_1) , (H_2) y (H_3) de la Sección 1.4, podemos ver la dependencia de A con respecto al primer autovalor $\lambda_1(\alpha, \Omega)$.

Lema 1.5.15 Sea $A(\alpha)$ la constante asociada al problema $(P_{\alpha, \lambda})$ obtenida en el Lema 1.5.13. Entonces, $A(\alpha) \rightarrow 0$ para $\alpha \rightarrow 0$.

Demostración. Observamos que

$$0 < \nu_1 = \inf_{\substack{\phi \in E_{\Sigma_1}(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 - q z^{q-1} \phi^2) dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx} \leq \rho_1 = \inf_{\substack{\phi \in E_{\Sigma_1}(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}.$$

Debido al Teorema 1.4.1 tenemos que

$$0 < \nu_1(\alpha) \leq \rho_1(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0,$$

y esto nos permite concluir la demostración ya que $\nu_1 > r A^{r-1}$. ■

Observaciones 1.5.16

1. De la demostración del Lema 1.5.2 se sigue que $\Lambda \leq \lambda_1$. Entonces por el Teorema 1.4.1, $\Lambda(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0$.
2. Por los resultados de esta sección, vemos que en $(0, \Lambda(\alpha)) \times (0, A(\alpha))$ hay, a lo más, una solución para el problema $(P_{\alpha, \lambda})$, donde el segundo intervalo denota el intervalo de normas admisibles en L^∞ . Más aún, la solución minimal converge a la trivial (para $\alpha \rightarrow 0$) en $L^\infty(\Omega)$.

Lema 1.5.17 Para $0 < \lambda < \Lambda(\alpha)$ pequeño, si u_α es solución del problema $(P_{\alpha, \lambda})$ obtenida por el Teorema del Paso de la Montaña, entonces,

$$\|u_\alpha\|_{W^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0.$$

Demostración. Consideremos el funcional asociado al problema $(P_{\alpha, \lambda})$ con $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{r+1} \int_{\Omega} u^{r+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{|\Omega|^{1-\frac{r+1}{2}}}{r+1} \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{r+1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{r+1}. \end{aligned}$$

Definimos la función $g(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{c(r, |\Omega|)}{r+1} \lambda_1^{-\frac{r+1}{2}} t^{r+1}$; $g'(t_\alpha) = 0$ es equivalente a $t_\alpha = \tilde{c}(r, |\Omega|) \lambda_1^{\frac{r+1}{2(r-1)}}$, donde $\lambda_1 = \lambda_1(\alpha)$ y por tanto $t_\alpha \rightarrow 0$ para $\alpha \rightarrow 0$.

Hemos probado que la solución del paso de la montaña para el problema $(P_{\alpha, \lambda})$, con $\lambda = 0$, converge a cero cuando $\alpha \rightarrow 0$. Lo mismo ocurre con la solución del paso de la montaña para todo $0 < \lambda < \Lambda(\alpha)$, dado que $\Lambda(\alpha) \leq \lambda_1(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0$. ■

La observación anterior nos permite establecer el siguiente resultado.

Teorema 1.5.18

1. Sean u_λ , u_{mp} solución minimal y del paso de la montaña, respectivamente, para el problema $(P_{\alpha, \lambda})$, entonces ambas soluciones u_λ , $u_{mp} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0$.
2. Si $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$ y se verifican las hipótesis (1.1), (1.2), (B1), (B2) y (B3), entonces existe una constante positiva $M(\varepsilon)$ tal que $\forall u_\alpha$ solución de $(P_{\alpha, \lambda})$ y todo $\lambda \in [0, \Lambda(\alpha)]$, se verifica, $(\lambda, \|u_\alpha\|_\infty) \in [0, \Lambda_D] \times [0, M(\varepsilon)]$, donde Λ_D es la constante optimal para la existencia del problema con condiciones Dirichlet.

1.6 Estimaciones Hölder

Consideramos el problema

$$(P_\alpha) \equiv \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B_\alpha(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio suave con frontera de clase \mathcal{C}^2 , $f \in L^r$ con $r > N/2$. Como mencionamos en la introducción, hay una pérdida de regularidad en los problemas mixtos, aquí considerados, concretamente en la interfase Γ . Antes de comenzar con dicho estudio, recordamos que, como Shamir probó en [115], hay un límite superior para la regularidad en términos de la continuidad Hölder. El ejemplo siguiente pone de manifiesto este hecho. En efecto, tomemos la función $\omega(x, y) = \text{Im}(x + iy)^{1/2}$ definida en el semiplano superior $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Dicha función verifica $-\Delta\omega = 0$ en \mathbb{R}_+^2 y además,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \omega(x, y) = 0, \quad x > 0; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad x < 0.$$

Claramente, el dato es idénticamente nulo, sin embargo, la continuidad Hölder de orden $1/2$ es la máxima regularidad que uno puede esperar. Concretando aún más, en [115] se prueba que cualquier solución de un problema mixto, como los aquí considerados, es Hölder continua de orden $\alpha < 1/2$, pero no se da ninguna información sobre las estimaciones de las normas Hölder de las soluciones.

En [116], Stampacchia prueba la continuidad Hölder, pero siguiendo la demostración se muestra que el exponente de hölderianidad, en principio, depende de las condiciones de contorno. A lo largo de esta sección, se utilizará la técnica de Stampacchia para encontrar un exponente uniforme, cuando movemos las condiciones de contorno de la forma señalada en la Sección 1.4. Como contrapartida, veremos que se pierde control sobre las normas Hölder de las soluciones. Es decir, no podemos controlar, a la vez, el exponente Hölder y cotas uniformes de las normas Hölder según $\alpha \rightarrow 0$. Es este el motivo por el cual el Corolario 1.1.7 lo enunciamos con $\alpha \in [\varepsilon, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)]$ y no en todo el intervalo $[0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)]$.

Para $y \in \overline{\Omega}$, $\rho > 0$ notamos $\Omega(y, \rho) = B_\rho(y) \cap \Omega$. Suponemos que las condiciones de contorno se mueven, como hemos detallado en la introducción, bajo las hipótesis (1.2), (B1), (B2) y (B3). También asumimos, como hemos hecho hasta ahora, que Ω es un dominio acotado con frontera regular, por ejemplo, de clase \mathcal{C}^2 . Entonces, en particular,

para $y \in \Gamma(\alpha)$, existen dos constantes positivas $\tau, \bar{\rho}$ tales que para todo $0 < \rho < \bar{\rho}$ y toda función $u \in E_{\Sigma_1}(\Omega)$ se verifica

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega(y,\rho))} \leq \tau \|\nabla u\|_{L^2(\Omega(y,\rho))}. \quad (1.24)$$

Lema 1.6.1 *Existen dos constantes $C \equiv C(N) > 0$ y $\tau \in (C, \infty)$, con τ independiente de $\alpha \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega))$ tal que se verifica la desigualdad (1.24).*

Demostración. Denotamos $\lambda_1(\Omega(y, \rho))$ el primer autovalor definido por el cociente

$$\lambda_1(\Omega(y, \rho)) \equiv \inf \frac{\int_{\Omega(y,\rho)} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega(y,\rho)} u^2 dx} \quad (1.25)$$

donde el ínfimo lo tomamos sobre todas las funciones $u \in W^{1,2}(\Omega(y, \rho))$, $u \not\equiv 0$ y con traza nula sobre $\Sigma_1(\alpha) \cap \partial\Omega(y, \rho)$. Podemos estimar la constante τ por las desigualdades de Sobolev y Poincaré como sigue,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{2^*}(\Omega(y,\rho))} &\leq C(N) \left(\|u\|_{L^2(\Omega(y,\rho))}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega(y,\rho))}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(N) \left(\frac{1 + \lambda_1(\Omega(y, \rho))}{\lambda_1(\Omega(y, \rho))} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega(y,\rho))}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Supongamos que se verifica

$$\lambda_1(\Omega(y, \rho)) \rightarrow \infty \quad \text{para } \rho \rightarrow 0, \quad (1.27)$$

entonces, tomando $\tau = C(N) \left(\frac{1 + \lambda_1(\Omega(y, \rho))}{\lambda_1(\Omega(y, \rho))} \right)^{1/2}$ con $\bar{\rho}$ suficientemente pequeño, tenemos que $\tau \in (C(N), \infty)$ depende de N y $\bar{\rho}$, pero es independiente de α y habremos acabado.

Para finalizar la prueba, demostramos, que en efecto, (1.27) se verifica. Fijado $y \in \Gamma$ (suponemos sin pérdida de generalidad $y = 0$) existe un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^2 , $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}_+^N$ para algún entorno U de y en $\bar{\Omega}$. Podemos considerar $U = \Omega(0, R)$ para algún $R > 0$ pequeño. Más aún, φ verifica $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\partial\Omega \cap \Omega(0, R)) \subset \{x_N = 0\}$. Teniendo en cuenta que $\Gamma(\alpha)$ es una variedad suave de dimensión $N - 2$, entonces se verifica $\varphi(\Gamma(\alpha) \cap \Omega(0, R)) \subset \{x_N = 0\}$ es otra variedad suave de dimensión $N - 2$. Por tanto,

existe un difeomorfismo de clase C^2 , $\tilde{\psi} : \varphi(\Gamma(\alpha) \cap \Omega(0, R)) \rightarrow \tilde{V} \subset \{x_1 = 0\} \cap \{x_N = 0\}$ (con R probablemente más pequeño que antes) con $\tilde{\psi}(0) = 0$. Consideramos $\psi(y', y_N) = (\tilde{\psi}(y'), y_N)$ con $y' = (y_1, \dots, y_{N-1})$, entonces ψ es otro difeomorfismo de clase C^2 . Definimos $g(x) = (\psi \circ \varphi)(x)$, por las propiedades de φ y ψ , tenemos que g es de nuevo un difeomorfismo de clase C^2 entre $\Omega(0, R)$ y $g(\Omega(0, R))$ verificando $g(0) = 0$, $g(\partial\Omega \cap \partial\Omega(0, R)) \subset \{x_N = 0\}$ y $g(\Gamma(\alpha) \cap \partial\Omega(0, R)) \subset \{x_1 = 0\} \cap \{x_N = 0\}$. Por tanto, para $0 < \rho < R$,

$$\frac{\int_{\Omega(0, \rho)} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega(0, \rho)} u^2 dx} = \frac{\int_{g(\Omega(0, \rho))} |\det(D_z(g^{-1}(z)))| |\nabla_z u(g^{-1}(z)) \cdot D_x g|_{x=g^{-1}(z)}|^2 dz}{\int_{g(\Omega(0, \rho))} |\det(D_z(g^{-1}(z)))| u^2(g^{-1}(z)) dz}. \quad (1.28)$$

Es sencillo comprobar que, con el cambio de variables $z\varepsilon = \bar{z}$ en el miembro derecho en la identidad (1.28), se obtiene

$$\bar{\lambda}_1(g(\Omega(0, \rho))) = \varepsilon^2 \bar{\lambda}_1(\varepsilon g(\Omega(0, \rho))),$$

donde $\bar{\lambda}_1$ es el ínfimo del lado derecho de (1.28) con las correspondientes condiciones de contorno en $W^{1,2}(g(\Omega(0, \rho)))$. Denotamos $A_\rho = \mu_\rho g(\Omega(0, \rho))$, donde $\mu_\rho = \sup\{\mu > 0 \mid \mu g(\Omega(0, \rho)) \subset g(\Omega(0, R))\}$. Por tanto, hemos probado que $\bar{\lambda}_1(\varepsilon(\rho)A_\rho) = \bar{\lambda}_1(A_\rho)/\varepsilon^2(\rho)$ donde $\varepsilon(\rho)$ está dado por $\varepsilon(\rho)A_\rho = \Omega(0, \rho)$, es decir, $\varepsilon(\rho) = 1/\mu(\rho)$. Para obtener (1.27), es suficiente comprobar que $\bar{\lambda}_1(A_\rho) \geq \bar{c} > 0$.

Como $g = (g_1, \dots, g_N)$ es un difeomorfismo, entonces $|\nabla g_j(0)| = s_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, N$. Consideremos $\tilde{g}_j = \frac{1}{s_j} g_j$ y el difeomorfismo \tilde{g} en lugar de g . Dado que $|\nabla(\tilde{g}_j(0))| = 1$, por continuidad existe un conjunto $U \subset \Omega(0, R)$ (el cual podemos suponer es $\Omega(0, R)$ para R probablemente más pequeño que antes) tal que $1 - \delta \leq |\nabla \tilde{g}_j(x)| \leq 1 + \delta$ para todo $x \in \Omega(0, R)$ y algún $0 < \delta \ll 1$. Se sigue que $\frac{|\Sigma_1(\rho)|}{|A_\rho|^{1/N}} \geq k_1 > 0$ para todo $0 < \rho < R$ y alguna constante positiva k_1 , donde $\Sigma_1(\rho)$ es la parte de la frontera de A_ρ en la que estamos tomando el dato de contorno nulo. Con lo que $\bar{\lambda}_1(A_\rho) \geq k_2 > 0$ para todo $0 < \rho < R$ (véase el Lema 1.4.7).

■

Observación 1.6.2 *El hecho que ya anunciamos, en la introducción de esta sección, sobre la pérdida de control sobre las normas Hölder de las soluciones de (P_α) para α próximo a 0, se pone de manifiesto en el Lema 1.24. Esto se debe a que el hecho de tener un exponente Hölder uniforme está garantizado porque podemos tomar τ finito e independiente de $\alpha \rightarrow 0$,*

pero como consecuencia, $\bar{\rho} \rightarrow 0$. Por este motivo, perdemos el control en las normas Hölder de las soluciones de (P_α) para $\alpha \rightarrow 0$, como se verá en la demostración del Teorema 4.2.19.

El Teorema 1.1.6 y el Corolario 1.1.7, establecidos en la introducción, se obtienen como consecuencia del Teorema 4.2.19 y el Corolario 4.2.21 respectivamente. Ambos, demostrados en el Capítulo 4 en un caso más general.

Capítulo 2

Autovalores y bifurcación para problemas cuasilineales relacionados con algunas desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

2.1 Introducción

En este capítulo analizamos las propiedades y el comportamiento de las soluciones del problema

$$(P_\lambda) \equiv \begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= f_\lambda(x, u) \text{ en } \Omega, \\ u &> 0 \text{ en } \Omega, \\ B(u) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y acotado con $0 \in \Omega$, $1 < p < N$ y $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$, con diferentes elecciones del segundo miembro f_λ .

Las condiciones de frontera las definimos por

$$B(u) = u\chi_{\Sigma_1} + |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \chi_{\Sigma_2}, \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_i \subset \partial\Omega, i = 1, 2, \text{ son subvariedades suaves de dimensión } N - 1, \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 = \partial\Omega \text{ y la interfase } \Gamma = \overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2 \\ \text{es una subvariedad suave de dimensión } N - 2. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Denotamos por ν la normal unitaria exterior a la frontera y por χ_{Σ_i} la función característica de Σ_i .

Escribimos por simplificar la notación $\Delta_{p,\gamma}v = \operatorname{div}(|x|^{-p\gamma}|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$. Estos operadores aparecen de forma natural asociados a las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, véase [41], que se presentan en la Sección 2.2 (véase la Proposición 2.8).

El interés de este capítulo es el estudio de los problemas mixtos con pesos singulares o degenerados que aparecen en las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

La estructura del capítulo es la siguiente:

En la Sección 2 estableceremos el marco funcional usado para el análisis de este tipo de problemas, ya que no es estándar. La estructura de las secciones siguientes la describimos en función del segundo miembro $f_\lambda(x, u)$:

Caso I: $f_\lambda(x, u) = \lambda \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p\beta}}$ con $\beta < (\gamma + 1)$, $0 < \lambda$. En algún sentido es un caso subcrítico.

En la Sección 2.3, construimos una sucesión de autovalores mediante técnicas de *minimax* de manera similar a [68], y extendemos las propiedades clásicas (del primer autovalor del problema de Dirichlet con el operador de Laplace) al operador aquí considerado ($\Delta_{p,\gamma}$) con las condiciones mixtas dadas. Precisamente, probaremos que $\lambda_1(\beta)$ es positivo, simple y aislado. Además, variaremos las condiciones de contorno de manera regular (que detallaremos con más precisión en dicha sección) para probar resultados de convergencia del primer autovalor y que aplicaremos en el Capítulo 3 para el estudio de los problemas críticos. El caso $\beta = (\gamma + 1)$ es “crítico” en un sentido que precisaremos y será discutido en el Capítulo 3.

Caso II: $f_\lambda(x, u) = \lambda \omega_\beta(x) u^{s-1} + |x|^{-q\mu} u^{q-1}$, con diferentes elecciones de los exponentes s, q y $\beta \leq (\gamma + 1)$, $\mu < (\gamma + 1)$, $0 < \lambda$, donde

$$\omega_\beta(x) = \begin{cases} |x|^{-p\beta} & \text{si } x \in \Omega \cap \{|x| < 1\}, \\ |x|^{-p(\gamma+1)} & \text{si } x \in \Omega \cap \{|x| \geq 1\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

El hecho de no tomar directamente el peso $|x|^{-p\beta}$, es para que en el paso al límite cuando $\beta \nearrow (\gamma + 1)$, tengamos monotonía en los autovalores asociados a este peso, $\lambda_1(\omega_\beta)$.

Si $s = p$, $1 < q < p$ se presentan dos casos, que resultan interesantes debido al comportamiento diferente de las soluciones. A saber: para $\beta, \mu < (\gamma + 1)$ probamos bifurcación desde infinito. Concretamente probamos que existe una rama de soluciones $(\lambda, u_\lambda) \in (0, \lambda_1(\omega_\beta)) \times L^\infty(\Omega)$ para el problema (P_λ) bifurcando desde infinito a la izquierda del primer autovalor asociado, $\lambda_1(\omega_\beta)$. Como consecuencia, obtenemos que para $\beta = (\gamma + 1)$, $\mu \leq (\gamma + 1)$, existe un continuo de soluciones $(\lambda, u_\lambda) \in (0, \Lambda_{N,p,\gamma}) \times E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ (donde $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ es el espacio de energía asociados a estos operadores, definido en (2.6)) bifurcando desde infinito a la izquierda de $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$, la constante óptima, definida en (2.11), para la desigualdad de Hardy-Sobolev, la cual suponemos $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,p,\gamma}$, es decir, $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ no se alcanza; puesto que con datos mixtos, hay condiciones bajo las que si se alcanza como veremos en el siguiente capítulo (véanse también las observaciones 2.2.5).

El estudio del Problema (P_λ) en estos casos lo desarrollaremos en la Sección 2.4.

Cuando $\beta, \mu < (\gamma + 1)$ y $s = p < q < p_{\gamma,\mu}^*$, siendo el exponente crítico:

$$p_{\gamma,\mu}^* = \begin{cases} \frac{pN}{N-p} & \text{si } \mu \leq \gamma, \\ \frac{pN}{N-p(\gamma+1-\mu)} & \text{si } \gamma < \mu < \gamma+1, \end{cases} \quad (2.5)$$

demostramos que existe un continuo de soluciones $C_\beta \subset (0, \lambda_1(\omega_\beta)) \times L^\infty(\Omega)$, bifurcando a la izquierda desde $(\lambda_1(\omega_\beta), 0)$.

Si consideramos $1 < s < p < q < p_{\gamma,\mu}^*$, $\beta \leq (\gamma + 1)$ y $\mu < (\gamma + 1)$, probamos que existe un continuo de soluciones bifurcando desde $(0, 0)$; en $L^\infty(\Omega)$ si $\beta < (\gamma + 1)$ y en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ (es decir, en energía) si $\beta = (\gamma + 1)$ (véanse el Teorema 2.4.12 y la Observación 2.4.14).

Obsérvese que los resultados presentados en este capítulo también son válidos y nuevos en el caso Dirichlet.

Publicaciones. Los resultados de este capítulo son parte del contenido del artículo [49] y el artículo [50].

2.2 Marco funcional, acotación y compacidad

Definimos el espacio de Lebesgue con peso $|x|^{-r\alpha}$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, por

$$L_\alpha^r(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \mid \int_\Omega |u|^r |x|^{-r\alpha} dx < \infty \right\}.$$

Dada $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ denotamos

$$\|\varphi\|_{p,\gamma} = \left(\int_\Omega (|\varphi|^p + |\nabla \varphi|^p) |x|^{-p\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

y entonces escribimos el espacio de Sobolev $\mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega)$ como la complección del espacio $C^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{p,\gamma}$. De manera análoga, definimos $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$ como la complección de $C_0^\infty(\Omega)$ bajo la norma $\|\cdot\|_{p,\gamma}$. En el espacio $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$, obsérvese que la norma $\|\cdot\|_{p,\gamma}$ es equivalente a la norma del gradiente en $L_\gamma^p(\Omega)$, debido a la desigualdad de Poincaré asociada.

El espacio natural en el que buscamos soluciones para el problema (P_λ) es

$$E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) = \{ v \in \mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \Sigma_1 \}, \quad (2.6)$$

el cual también podemos definir como la clausura de $C_c^1(\Omega \cup \Sigma_2)$ con la norma $\|\cdot\|_{p,\gamma}$. Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1) \neq 0$, tenemos que, como hemos visto antes, la norma $\|\cdot\|_{p,\gamma}$ en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ es equivalente a la norma del gradiente en $L_\gamma^p(\Omega)$. Teniendo en cuenta esa equivalencia, desde ahora en adelante, denotamos por

$$\|\varphi\|_{E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)}^p = \|\varphi\|_{p,\gamma}^p = \int_\Omega |x|^{-p\gamma} |\nabla \varphi|^p dx, \quad \forall \varphi \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega).$$

Para ver detalles sobre estos espacios pueden consultarse las referencias [84], [5] ó [20].

Comenzamos formulando una desigualdad que para funciones regulares y $p = 2$ fue obtenida por Picone en [107]. (Véase por ejemplo [10] para $p > 1$).

Lema 2.2.1 (Picone) *Sea $v > 0, u \geq 0$ dos funciones diferenciables, entonces*

$$|x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p \geq |x|^{-p\gamma} \nabla \left(\frac{u^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v. \quad (2.7)$$

Demostración. Sea $u, v \in C^1(\Omega)$ tales que $u \geq 0$ y $v > 0$, entonces para demostrar (2.7) tan solo hay que probar que

$$R(u, v) = |\nabla u|^p - \nabla \left(\frac{u^p}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \geq 0.$$

Por un cálculo simple se obtiene

$$R(u, v) = |\nabla u|^p + (p-1) \left(\frac{u^p}{v^p} \right) |\nabla v|^p - p \left(\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla u.$$

Usando la desigualdad de Minkowski en \mathbb{R}^N , se obtiene la siguiente desigualdad,

$$\left(\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla u \leq \left(\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} \right) |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| \leq \frac{1}{p} |\nabla u|^p + \frac{p-1}{p} \frac{u^p}{v^p} |\nabla v|^p,$$

de donde se sigue que $R(u, v) \geq 0$.

Observamos que si además $R(u, v) = 0$, entonces $|\nabla v| |\nabla u| = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$, por tanto se concluye que $\nabla u = \frac{u}{v} \nabla v$ y por consiguiente $\nabla \left(\frac{u}{v} \right) = 0$, entonces $u = cv$. Es decir $R(u, v) = 0$ se alcanza en líneas rectas en el espacio de funciones. ■

A continuación enunciamos la siguiente versión integral del Lema 2.2.1, que será la forma en que se utilizará en la Parte II de la memoria.

Teorema 2.2.2 Sea $v \in \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$ tal que $-\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla v|^{p-2} \nabla v)$ es una medida de Radon positiva y acotada, $v|_{\partial\Omega} = 0$, $v \not\equiv 0$. Entonces, para toda $u \in \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$ se verifica

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p |x|^{-p\gamma} dx \geq \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{v^{p-1}} \left(-\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \right) dx.$$

Véase [5] para una demostración.

Utilizaremos el siguiente caso particular de las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (véase [41]).

Teorema 2.2.3 (Caffarelli-Kohn-Nirenberg) Sean r, γ y β constantes reales tales que

$$p \geq 1 \quad y \quad r, \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{N}, \frac{1}{r} - \frac{\beta}{N} > 0. \quad (2.8)$$

Entonces existe una constante positiva C tal que para toda función $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ se verifica

$$\left\| |x|^{-\beta} u \right\|_{L^r} \leq C \left\| |x|^{-\gamma} |\nabla u| \right\|_{L^p}, \quad (2.9)$$

si y sólo si

$$\frac{1}{r} - \frac{\beta}{N} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma+1}{N} \quad \text{y} \quad 0 \leq \beta - \gamma \leq 1. \quad (2.10)$$

Además, sobre cada conjunto compacto en el espacio paramétrico en el cual se verifican las desigualdades (2.8) y (2.10), la constante C es acotada.

Definición 2.2.4 Definimos la constante

$$\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega), u \neq 0} \frac{\||x|^\gamma \nabla u\|_p^p}{\||x|^{\gamma+1} u\|_p^p}, \quad (2.11)$$

Observaciones 2.2.5

1. Teniendo en cuenta que $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$, obtenemos:

$$0 < \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \leq \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \partial\Omega) \equiv \Lambda_{N,p,\gamma} \equiv \left(\frac{N-p(\gamma+1)}{p} \right)^p < \infty.$$

Véase el Lema 3.2.4 para la demostración.

2. Además en el Teorema 3.5.2 probaremos que si

$$\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,p,\gamma},$$

entonces $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza.

Obsérvese que en los casos límite: $\beta = \gamma$ y $r = p^*$, (2.9) se reduce a la desigualdad de Sobolev y si $\beta = (\gamma+1)$ y $r = p$, (2.9) corresponde a la desigualdad de Hardy.

Recordemos del apartado de notaciones que $|E|_m = \int_E dm$, con $dm = |x|^m dx$, para cada conjunto m -medible $E \subset \mathbb{R}^N$.

Para demostrar la regularidad L^∞ , utilizamos el siguiente lema clásico de iteración debido a Stampacchia (véase [117]).

Lema 2.2.6 Supongamos que φ es una función real que verifica:

1. $\varphi(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$,
2. φ es no creciente,
3. existen constantes positivas κ , ν y C tales que si $h > k > k_0$ tenemos que $\varphi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^\kappa} (\varphi(k))^\nu$.

Entonces, existen constantes positivas s_0 , s_1 , y s_2 tales que:

- (a) si $\nu > 1$, $\varphi(k_0 + d) = 0$, donde $d^\kappa = s_0 C (\varphi(k_0))^{\nu-1}$,
- (b) si $\nu = 1$, $\varphi(h) \leq \varphi(k_0) \exp[s_1 - \rho(h - k_0)]$, donde $\rho = (s_2 C)^{-1/\kappa}$,
- (c) si $\nu < 1$ y $k_0 > 0$, $\varphi(h) \leq \left(s_1 C^{\frac{\kappa}{1-\nu}} + s_2 k_0^{\frac{\kappa}{1-\nu}} \varphi(k_0) \right) h^{-\frac{\kappa}{1-\nu}}$.

Teorema 2.2.7 Sea $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = f & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$, $f \in L_\eta^r(\Omega)$ para algún $r > \frac{N}{p}$, y $\eta = -p^* \gamma \frac{r-1}{r}$. Entonces $u \in L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Consideremos $v_k = \text{sign}(u)(|u| - k)^+$, entonces $v_k \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ y $u_{x_i} = (v_k)_{x_i}$ en $A(k) = \{x \in \Omega : |u(x)| > k\}$. Usando v_k como función test en la ecuación $-\Delta_{p,\gamma} u = f$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{A(k)} |\nabla v_k|^p |x|^{-p\gamma} dx &= \lambda \int_{\Omega} f v_k dx \\ &\leq \left(\int_{A(k)} v_k^{p^*} |x|^{-p^*\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{\Omega} |f|^r |x|^{(\gamma+\varepsilon)r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad \cdot \left(\int_{A(k)} \frac{dx}{|x|^{\varepsilon s}} \right)^{\frac{1}{s}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

con $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, $\varepsilon > 0$. Entonces, concluimos que

$$\left(\int_{A(k)} |v_k|^{p^*} |x|^{-p^*\gamma} dx \right)^{\frac{p-1}{p^*}} \leq C \left(\int_{A(k)} \frac{dx}{|x|^{\varepsilon s}} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Supongamos que $0 < k < h$, entonces $A(h) \subset A(k)$ y como consecuencia,

$$(h-k)^{p-1} \left(\int_{A(h)} |x|^{-p^*\gamma} dx \right)^{\frac{p-1}{p^*}} \leq \left(\int_{A(k)} |v_k|^{p^*} |x|^{-p^*\gamma} dx \right)^{\frac{p-1}{p^*}}.$$

con $\beta < (\gamma + 1)$, $\lambda > 0$. Entonces $u \in L^\infty(\Omega)$.

Lema 2.2.10 *Supongamos que*

$$\frac{1}{r} - \frac{\beta}{N} > \frac{1}{p} - \frac{\gamma + 1}{N} \text{ y } 0 \leq (\beta - \gamma) \leq 1. \quad (2.17)$$

Entonces, si $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$,

$$1. \quad \| |x|^{-\beta} u \|_{L^r(\Omega)} \leq C(\Omega) \| |x|^{-\gamma} |\nabla u| \|_{L^p(\Omega)}.$$

2. *La anterior inclusión es compacta.*

Demostración. La primera parte es consecuencia de las desigualdades de Hölder y Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Para demostrar la segunda parte, supongamos que $\{u_k\} \subset E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ es una sucesión acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $\| |\nabla u_k| |x|^{-\gamma} \|_{L^p(\Omega)} < M < \infty$. Entonces, existe una subsucesión débilmente convergente a una función $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$. Por el Teorema clásico de Sobolev, para alguna subsucesión,

$$\begin{aligned} u_{k_n} &\rightarrow u \quad \text{en c.t.p. de } \Omega \setminus B_{1/n}(0), \\ u_{k_n} &\rightarrow u \quad \text{en } L_\beta^r(\Omega \setminus B_{1/n}(0)), \\ u_{k_n} &\rightarrow u \quad \text{en } L^r(\Omega \setminus B_{1/n}(0)). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Además denotando la subsucesión por u_n , ésta converge en c.t.p. de Ω . Definimos $\omega_n = u_n - u$, entonces por (2.18), $\omega_n \rightarrow 0$ en c.t.p. de Ω .

Ahora utilizamos el argumento del Teorema de Vitali. En primer lugar, por el Teorema de Egorov, dado $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto medible $A_\varepsilon \subset \Omega$ con $|\Omega \setminus A_\varepsilon| < \varepsilon$ tal que $\omega_n \rightarrow 0$ uniformemente en A_ε . Descomponiendo Ω y aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\omega_n|^r |x|^{-\beta r} dx &\leq \int_{A_\varepsilon} |\omega_n|^r |x|^{-\beta r} dx + \int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |\omega_n|^r |x|^{-\beta r} dx \\ &\leq \int_{A_\varepsilon} |\omega_n|^r |x|^{-\beta r} dx + C \left(\int_\Omega |\nabla \omega_n|^p |x|^{-p\gamma} dx \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |x|^{r(\gamma-\beta) \frac{p^*}{p^*-r}} dx \right)^{\frac{p^*-r}{p^*}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde

$$\int_{A_\varepsilon} |\omega_n|^r |x|^{-\beta r} dx \rightarrow 0 \text{ para } n \rightarrow \infty$$

porque $\omega_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ uniformemente en A_ε y $-r\beta > -N$ por la hipótesis (2.17).

Por otro lado,

$$\int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^p |x|^{-p\gamma} dx \leq C \quad \text{uniformemente en } n.$$

Nótese que como $\frac{1}{r} > \frac{\beta}{N} + \frac{1}{p^*} - \frac{\gamma}{N}$ es equivalente a $r[(\beta - \gamma)p^* + N] < Np^*$, que a su vez equivale a $r(\gamma - \beta)\frac{p^*}{p^* - r} > -N$, entonces existe $s > 1$ tal que $sr(\gamma - \beta)\frac{p^*}{p^* - r} > -N$, entonces por la desigualdad de Hölder,

$$\int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |x|^{r(\gamma - \beta)\frac{p^*}{p^* - r}} dx \leq \left(\int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |x|^{sr(\gamma - \beta)\frac{p^*}{p^* - r}} dx \right)^{\frac{1}{s}} |\Omega \setminus A_\varepsilon|^{1 - \frac{1}{s}} \leq C\varepsilon^\delta$$

donde $\delta = 1 - \frac{1}{s} > 0$ y $C > 0$ es una constante que únicamente depende de Ω , r , $\gamma - \beta$ y N . Entonces concluimos que

$$0 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\omega_n|^r |x|^{-\beta r} dx \right) \leq C \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\delta = 0.$$

■

Corolario 2.2.11 *Supongamos que $\beta < (\gamma + 1)$ y $-\infty < \gamma < \frac{N - p}{p}$. Entonces se verifican las siguientes inclusiones compactas: $E_{\Sigma_1}^{p, \gamma}(\Omega) \hookrightarrow L_\beta^p(\Omega)$.*

Demostración. Dividimos la demostración en dos etapas:

- (1) Si $\gamma \leq \beta$ la prueba es una consecuencia inmediata del Lemma 2.2.10.
- (2) Si $\beta < \gamma$, tenemos que

$$\int_{\Omega} |x|^{-\beta r} |u|^r dx \leq \int_{\Omega} |x|^{-\beta_0 r} |u|^r |x|^{(\beta_0 - \beta)r} dx \leq C \int_{\Omega} |x|^{-\beta_0 r} |u|^r dx$$

para algún $\beta < \gamma < \beta_0 < (\gamma + 1)$. Y concluimos por la primera etapa.

■

2.3 Construcción de una sucesión de autovalores por técnicas de minimax. Propiedades del primer autovalor

2.3.1 Construcción de una sucesión de autovalores

En esta subsección estudiamos el problema de autovalores

$$(EP_\gamma^\beta) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = \lambda |x|^{-p\beta} |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

con Ω , γ como en la introducción y $\beta < (\gamma + 1)$.

Probamos la existencia de una sucesión de autovalores $\lambda_k(\beta) \in \mathbb{R}^+$, con $\lambda_k(\beta) \rightarrow \infty$ para $k \rightarrow \infty$, para los cuales el Problema (EP_γ^β) tiene solución no trivial. Para probar la positividad de los autovalores, consideramos el funcional asociado

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} |u|^p dx$$

definido en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$. Si u_0 es solución del problema (EP_γ^β) entonces $\mathcal{J}'(u_0) = 0$ y por consiguiente,

$$0 = \langle \mathcal{J}'(u_0), u_0 \rangle = \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u_0|^p dx - \lambda \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} |u_0|^p dx.$$

Teniendo en cuenta que para $\beta < (\gamma + 1)$, $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \subset L_{\beta}^p(\Omega)$ resulta

$$0 \geq \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u_0|^p dx - \lambda C \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u_0|^p dx,$$

y como consecuencia inmediata, $\lambda \geq \frac{1}{C}$, siendo $C > 0$ la mejor constante en la desigualdad de Hardy-Sobolev, $\|u\|_{L_{\beta}^p(\Omega)}^p \leq C \|\nabla u\|_{L_{\gamma}^p(\Omega)}^p$.

Observaciones 2.3.1

1. La mejor constante de la anterior desigualdad de Hardy-Sobolev en dominios regulares acotados y con condiciones mixtas depende en general de Ω . Ver la Subsección 3.2.2 del Capítulo 3.
2. Evidentemente, en el caso $p = 2$ se pueden utilizar las técnicas hilbertianas clásicas para obtener el espectro completo, mientras que para $p \neq 2$, sólo podemos demostrar la existencia de una sucesión de autovalores, que no se sabe si los contiene todos. En el caso $\gamma = 0$ y $N = 1$ [80] ó en el caso radial [57] se tiene el "espectro completo".

Una vez hemos demostrado la compacidad en la sección anterior, veremos que una adaptación del método utilizado en [68], a nuestro tipo de problemas mixtos, nos permite construir una sucesión de autovalores. Más concretamente, el método usado sigue las ideas de Amann en [11], es decir, la teoría de Lusternik-Schnirelman [95]. Por conveniencia del lector, describimos el método en detalle.

Consideremos la variedad

$$M_\alpha = \left\{ u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \mid \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx = \alpha \right\}$$

y definamos

$$b(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-p\beta} |u|^p dx.$$

Buscamos puntos críticos del funcional b restringido a la variedad M_α , utilizando un método mini-max. De este modo, tenemos planteado un problema de extremos condicionados, en el que aparecerán los multiplicadores de Lagrange a partir de los cuales podemos calcular los autovalores del problema (EP_γ^β) .

Como siempre que se utiliza una técnica mini-max, el punto clave está en probar el correspondiente lema de deformación, en este caso restringido a la variedad M_α .

Empezamos definiendo $\rho : E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \rightarrow (0, \infty)$ por

$$\rho(u) = \left(\frac{1}{p\alpha} \int_\Omega |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

La aplicación ρ es par y además está acotada en el complementario de un entorno del origen. Esta aplicación nos permite proyectar $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \setminus \{0\}$ sobre M_α , puesto que $\rho(u)u \in M_\alpha$ si $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \setminus \{0\}$. Además podemos calcular fácilmente su derivada, que está dada por:

$$\langle \rho'(u), v \rangle = -\frac{1}{p} \alpha^{1/p} \left(\frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx \right)^{-\frac{p+1}{p}} \langle -\Delta_{p,\gamma} u, v \rangle, \quad \forall v \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega), \quad (2.20)$$

de modo que ρ' es impar y uniformemente continua sobre conjuntos acotados en el complementario de un entorno del origen (nótese que el operador $\Delta_{p,\gamma} : E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \rightarrow (E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))'$ es uniformemente continuo en conjuntos acotados). Además, a partir de (2.20), es inmediato comprobar que si $\langle -\Delta_{p,\gamma} u, v \rangle = 0$, entonces se verifica $\langle \rho'(u), v \rangle = 0$.

Puesto que $p > 1$, $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo y uniformemente convexo, ver [84]. Entonces, dada $\phi \in (E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))'$ (el espacio dual de $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$), existe un único elemento $J(\phi) \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ tal que:

1. $\langle \phi, J(\phi) \rangle = \|\phi\|_{(E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))'}^2$,
2. $\|J(\phi)\|_{E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)} = \|\phi\|_{(E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))'}$.

Así definimos la aplicación de dualidad $J : (E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))' \rightarrow E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, que es impar y uniformemente continua sobre conjuntos acotados (véase por ejemplo [31]).

Una vez definidas estas dos aplicaciones, ρ y J , el siguiente paso consiste en construir un flujo sobre la variedad M_α a lo largo de cuyas trayectorias el funcional b sea creciente y tengamos control preciso de ese crecimiento (flujo asociado a un campo pseudo-gradiente), y el correspondiente lema de deformación que nos permita aplicar la teoría mini-max, ver [112]. Primero, tomamos la derivada de b a lo largo de M_α , $D(u) \in (E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))'$ que para $v \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \langle D(u), v \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} b((u + tv)\rho(u + tv)) \\ &= \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} |u|^{p-2} u v dx - \left(\frac{1}{p\alpha} \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} |u|^p dx \right) \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx \end{aligned}$$

escribiendo $B(u) = |x|^{-p\beta} |u|^{p-2} u$ -por simplificar la notación- tenemos que

$$D(u) = B(u) - \frac{\langle B(u), u \rangle}{\langle -\Delta_{p,\gamma} u, u \rangle} (-\Delta_{p,\gamma} u) = |x|^{-p\beta} |u|^{p-2} u - \frac{1}{p\alpha} \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} |u|^p dx (-\Delta_{p,\gamma} u).$$

A partir de esta derivada material, construimos el siguiente operador, $T : M_\alpha \rightarrow E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ definido por:

$$T(u) = J(D(u)) - \frac{\langle -\Delta_{p,\gamma}(u), J(D(u)) \rangle}{\langle -\Delta_{p,\gamma}(u), u \rangle} u,$$

que es uniformemente continuo, impar y verifica $\langle -\Delta_{p,\gamma}(u), T(u) \rangle = 0$. Además, T es acotado en M_α , por lo tanto existen constantes positivas τ_0, γ_0 , tales que para cada $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$ y toda $u \in M_\alpha$ tenemos que

$$\|u + \tau T(u)\|_{E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)} \geq \gamma_0 > 0.$$

Entonces podemos definir el flujo $H : M_\alpha \times [-\tau_0, \tau_0] \rightarrow M_\alpha$ por $H(u, \tau) = \rho(u + \tau T(u))(u + \tau T(u))$ que es impar en u , ($H(u, \tau) = -H(-u, \tau)$ para τ fijo) uniformemente continuo y verifica $H(u, 0) = u$ para toda $u \in M_\alpha$.

El siguiente resultado demuestra que H define trayectorias sobre M_α a lo largo de las cuales el funcional b es creciente y podemos controlar de manera precisa este crecimiento. Esta es la propiedad relevante de H que nos permite obtener un resultado de deformación.

Lema 2.3.2 *En las condiciones anteriores sobre H , existe una aplicación*

$$r : \mathcal{M}_\alpha \times [-\tau_0, \tau_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $r(u, \tau) \rightarrow 0$ para $\tau \rightarrow 0$ uniformemente en $u \in \mathcal{M}_\alpha$, y que verifica

$$b(H(u, \tau)) = b(u) + \int_0^\tau (\|D(u)\|^2 + r(u, \sigma)) d\sigma, \quad \forall u \in \mathcal{M}_\alpha, \tau \in [-\tau_0, \tau_0].$$

Demostración. Tenemos que $\langle b'(u), v \rangle = \langle B(u), v \rangle$ y $H(u, 0) = u$, por tanto podemos escribir

$$b(H(u, \tau)) = b(u) + \int_0^\tau \langle B(H(u, \sigma)), \frac{\partial}{\partial \sigma} H(u, \sigma) \rangle d\sigma. \quad (2.21)$$

Teniendo en cuenta que $\rho(u) = 1$ y $\langle \rho'(u), T(u) \rangle = 0$ puesto que $\langle -\Delta_{p,\gamma}(u), T(u) \rangle = 0$, calculamos en detalle $\frac{\partial}{\partial \sigma} H(u, \sigma)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (H(u, \sigma)) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} [\rho(u + \sigma Tu)(u + \sigma Tu)] \\ &= \langle \rho'(u + \sigma Tu), Tu \rangle + \rho(u + \sigma Tu) Tu \\ &= \langle \rho'(u + \sigma Tu) - \rho'(u), Tu \rangle (u + \sigma Tu) + (\rho(u + \sigma Tu) - \rho(u)) Tu \\ &\quad + \rho(u) Tu. \end{aligned}$$

Sea

$$R(u, \sigma) = \langle \rho'(u + \sigma Tu) - \rho'(u), Tu \rangle (u + \sigma Tu) + (\rho(u + \sigma Tu) - \rho(u)) Tu$$

de modo que $\frac{\partial}{\partial \sigma} H(u, \sigma) = R(u, \sigma) + \rho(u) Tu$. Como T es acotada y ρ, ρ' son uniformemente continuas sobre conjuntos compactos en el complementario de un entorno del origen, resulta que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} R(u, \sigma) = 0$, uniformemente en $u \in \mathcal{M}_\alpha$. Por lo tanto, sustituyendo en (2.21), obtenemos:

$$\begin{aligned} b(H(u, \tau)) &= b(u) + \int_0^\tau \langle B(H(u, \sigma)), R(u, \sigma) + Tu \rangle d\sigma \\ &= b(u) + \int_0^\tau (\langle B(u), Tu \rangle + r(u, \sigma)) d\sigma, \end{aligned}$$

donde $r(u, \sigma) = \langle B(u), R(u, \sigma) \rangle + \langle B(H(u, \sigma)) - B(u), R(u, \sigma) + Tu \rangle$, y de nuevo, $r(u, \sigma) \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow 0$ uniformemente en $u \in \mathcal{M}_\alpha$ puesto que $H(u, \sigma)$ es uniformemente continua.

Finalmente, para terminar la demostración basta observar que

$$\langle B(u), Tu \rangle = \langle Du, J(Du) \rangle = \|Du\|^2$$

ya que

$$\begin{aligned} \langle B(u), Tu \rangle &= \left\langle Du + \frac{\langle B(u), u \rangle}{\langle -\Delta_{p,\gamma} u, u \rangle} (-\Delta_{p,\gamma} u), J(Du) - \frac{\langle -\Delta_{p,\gamma} u, J(Du) \rangle}{\langle -\Delta_{p,\gamma} u, u \rangle} u \right\rangle \\ &= \langle Du, J(Du) \rangle - \left\langle Du, \frac{\langle -\Delta_{p,\gamma} u, J(Du) \rangle}{\langle -\Delta_{p,\gamma} u, u \rangle} u \right\rangle \end{aligned}$$

$$\text{y } \langle -\Delta_{p,\gamma} u, Tu \rangle = 0.$$

■

Probado este lema, podemos formular el lema de deformación necesario para aplicar la teoría de mini-max.

Lema 2.3.3 *Dado $\nu > 0$ fijo, consideramos los conjuntos de nivel superiores*

$$b_\nu = \{u \in M_\alpha : b(u) \geq \nu\}.$$

Supongamos que existe un abierto relativo $U \subset M_\alpha$, y constantes positivas δ, η con $\eta < \nu$ y tales que

$$\|D(u)\| \geq \delta \text{ si } u \in V_\eta = \{u \in M_\alpha : u \notin U \wedge |b(u) - \nu| \leq \eta\}.$$

Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y un operador H_ε continuo e impar, tal que

$$H_\varepsilon(b_{\nu-\varepsilon} \setminus U) \subset b_{\nu+\varepsilon}.$$

Demostración. Tomamos $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ tal que

$$|r(u, \sigma)| \leq \frac{1}{2} \delta^2 \quad \forall u \in M_\alpha, \quad \sigma \in [-\tau_1, \tau_1]$$

(esto es posible porque $r(u, \sigma) \rightarrow 0$ para $\sigma \rightarrow 0$ uniformemente en $u \in M_\alpha$). Por el Lema 2.3.2, si $u \in V_\rho$ y $\tau \in [0, \tau_1]$ tenemos que

$$b(H(u, \tau)) = b(u) + \int_0^\tau \{\|Du\|^2 + r(u, \sigma)\} d\sigma \geq b(u) + \int_0^\tau \left(\delta^2 - \frac{1}{2} \delta^2 \right) d\sigma = b(u) + \frac{1}{2} \delta^2 \tau.$$

Sea $\varepsilon = \min\{\rho, \frac{1}{4} \delta^2 \tau_1\}$; teniendo en cuenta la definición de V_ρ , si $u \in V_\rho \cap b_{\nu-\varepsilon}$, se verifica:

$$b(H(u, \tau_1)) \geq b(u) + 2\varepsilon \geq \nu + \varepsilon. \quad (2.22)$$

De nuevo por el Lema 2.3.2, si $u \in V_\rho$ está fijo, se tiene que $b(H(u, \tau))$ es estrictamente creciente en algún intervalo $[0, \sigma) \subset [0, \tau_1]$. Así, dada $u \in V_\epsilon$ podemos definir

$$t_\epsilon = \min\{\tau > 0 : b(H(u, \tau)) = \nu + \epsilon\}.$$

El funcional t_ϵ está bien definido y verifica

- i) $0 < t_\epsilon(u) \leq \tau_1$ (por (2.22), porque $V_\epsilon \subset V_\rho \cap b_{\nu-\epsilon}$),
- ii) $t_\epsilon(u)$ es continuo en V_ϵ .

La demostración de ii) puede hacerse por reducción al absurdo. Supongamos que t_ϵ no es continua en algún $u \in V_\epsilon$. Entonces, existe una constante $\eta > 0$ y una sucesión $\{v_j\} \subset V_\epsilon$, tales que $\|u - v_j\| < 1/j$, y $|t_\epsilon(u) - t_\epsilon(v_j)| > \eta$.

Por definición de t_ϵ , $b(H(u, t_\epsilon(u))) = b(H(v_j, t_\epsilon(v_j))) = \nu + \epsilon$, de manera que

$$\begin{aligned} 0 &= |b(H(u, t_\epsilon(u))) - b(H(v_j, t_\epsilon(v_j)))| \\ &\geq |b(H(u, t_\epsilon(u))) - b(H(u, t_\epsilon(v_j)))| - |b(H(u, t_\epsilon(v_j))) - b(H(v_j, t_\epsilon(v_j)))|. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por continuidad de H y b , tomando j suficientemente grande, podemos suponer:

$$|b(H(u, t_\epsilon(v_j))) - b(H(v_j, t_\epsilon(v_j)))| < \frac{1}{4}\eta\delta^2. \quad (2.24)$$

Además, por el Lema 2.3.2 se verifica:

$$|b(H(u, t_\epsilon(u))) - b(H(u, t_\epsilon(v_j)))| = \int_{\min\{t_\epsilon(u), t_\epsilon(v_j)\}}^{\max\{t_\epsilon(u), t_\epsilon(v_j)\}} (\|Du\|^2 + r(u, \sigma)) d\sigma \geq \frac{1}{2}\eta\delta^2. \quad (2.25)$$

Enlazando (2.23), (2.24) y (2.25), resulta $0 \geq \frac{1}{4}\eta\delta^2 > 0$ que es una contradicción.

Ahora podemos construir de manera sencilla la aplicación H_ϵ . Basta definir

$$H_\epsilon : b_{\nu-\epsilon} - U \rightarrow b_{\nu+\epsilon}$$

por

$$H_\epsilon(u) = \begin{cases} H(u, t_\epsilon(u)), & \text{si } u \in V_\epsilon \\ u, & \text{si } u \in b_{\nu-\epsilon} - (U \cup V_\epsilon). \end{cases}$$

Finalmente, es sencillo comprobar que H_ϵ es continua e impar.

■

Una vez probado el lema de deformación para el problema que estamos estudiando, sólo nos falta comprobar que se verifica otro requisito fundamental de la teoría de mini-max, la correspondiente condición de Palais-Smale. Igual que ocurría en el lema anterior, debemos probar una condición especial, que refleje el hecho de estar estudiando el funcional b sobre la variedad M_α .

Lema 2.3.4 *Sea $\nu > 0$, y supongamos que $\{u_j\} \subset M_\alpha$ tal que*

$$b(u_j) \geq \nu \quad y \quad D(u_j) \rightarrow 0.$$

Entonces existe una subsucesión de $\{u_j\}$ que converge fuertemente en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ a una función $u \in M_\alpha$.

Demostración. Como M_α es acotado y $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ es reflexivo, existe una subsucesión (que notamos igual) $u_j \rightarrow u$ en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$. También podemos suponer que $b(u_j) \rightarrow b(u)$ puesto que b es compacto, por el Corolario 2.2.11. Además, $b(u) \geq \nu$ y

$$\mu_j = \frac{\int_{\Omega} |x|^{-p\beta} |u_j|^p dx}{\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u_j|^p dx} \longrightarrow \mu = \frac{1}{\alpha p} \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} |u|^p dx.$$

Por las propiedades anteriores, podemos asegurar que $u \neq 0$, $B(u) \neq 0$.

Teniendo en cuenta que B es compacto, como $D(u_j) \rightarrow 0$ tenemos que

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} D(u_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} (B(u_j) - \mu_j (-\Delta_{p,\gamma}(u_j))) = B(u) - \mu \lim_{j \rightarrow \infty} (-\Delta_{p,\gamma}(u_j))$$

y como consecuencia, $-\Delta_{p,\gamma}(u_j) \rightarrow \frac{1}{\mu} B(u)$. Terminamos debido a la continuidad del operador $(-\Delta_{p,\gamma})^{-1} : (E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))' \rightarrow E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, la cual podemos probar como en el caso del p -Laplaciano con los cambios adecuados sin dificultades (véase [68]).

■

Con los resultados ya probados, podemos formular el resultado principal sobre la existencia de autovalores.

Teorema 2.3.5 *Consideremos $C_k = \{C \subset M_\alpha : C \text{ es compacto, } C = -C \text{ y } \gamma(C) \geq k\}$ donde $\gamma(\cdot)$ es el género (ver por ejemplo [112] para una definición y sus propiedades). Definamos*

$$\nu_k = \sup_{C \in C_k} \min_{u \in C} b(u).$$

Entonces $\nu_k > 0$, y existe $u_k \in M_\alpha$ solución de (EP_γ^β) con $b(u_k) = \nu_k$ y $\lambda_k = \frac{\alpha}{\nu_k}$.

Demostración. Primero, probamos que $\nu_k > 0$. Teniendo en cuenta que M_α es una esfera infinito-dimensional en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, entonces $\gamma(M_\alpha) = +\infty$. Por tanto ν_k está bien definido, en el sentido que para cada $k > 0$, $C_k \neq \emptyset$, y dado $C \in C_k$, se verifica $\min_{u \in C} b(u) > 0$, de modo que $\nu_k > 0$ para todo k . Consideramos ahora $k > 0$ fijo; vamos a demostrar la existencia de la solución u_k . Para ello, probaremos que existe una sucesión $\{u_j\} \subset M_\alpha$, que verifique

$$\begin{aligned} \text{a) } b(u_j) &\rightarrow \nu_k \\ \text{b) } D(u_j) &\rightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

aplicando el Lema 2.3.4. Si no existiese esa sucesión, podríamos elegir constantes positivas δ, ρ , tales que

$$\|D(u)\| \geq \delta \quad \text{si } u \in \{u \in M_\alpha : |b(u) - \nu_k| \leq \rho\}.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\delta < \nu_k$. Entonces por el lema de deformación, Lema 2.3.3 con $U = \emptyset$, en particular, existe $\varepsilon > 0$ y una aplicación continua e impar H_ε , tal que $H_\varepsilon(b_{\nu_k-\varepsilon}) \subset b_{\nu_k+\varepsilon}$. Por definición de ν_k , existe $C_\varepsilon \in C_k$ tal que $b(u) \geq \nu_k - \varepsilon$ en C_ε , es decir, $C_\varepsilon \subset b_{\nu_k-\varepsilon}$. Por tanto $b(u) \geq \nu_k + \varepsilon$ en $H_\varepsilon(C_\varepsilon)$. Pero $\gamma(H_\varepsilon(C_\varepsilon)) \geq k$, por ser $\gamma(C_\varepsilon) \geq k$, de modo que $H_\varepsilon(C_\varepsilon) \in C_k$, lo que contradice la definición de ν_k . Entonces ya tenemos la sucesión $\{u_j\}$ verificando las propiedades deseadas, y por el Lema 2.3.4 tenemos la existencia de la solución u_k , que por continuidad verifica $b(u_k) = \nu_k$. ■

Esto garantiza la existencia de soluciones no triviales para el Problema (EP_γ^β) . Sin embargo, en principio no podemos asegurar que los valores ν_k sean todos distintos, es decir, nos falta estudiar la multiplicidad de los valores críticos ν_k . Más precisamente, probamos que la sucesión de valores críticos es infinita, es decir, que tenemos una sucesión de autovalores.

Proposición 2.3.6 *Sea ν_k definido como en el Teorema 2.3.5. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$. Como consecuencia, $\lambda_k = \alpha \nu_k^{-1} \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$.*

Demostración. Sea E_j una sucesión de subespacios lineales en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ tales que

1. $E_k \subset E_{k+1}$,

$$2. \overline{\mathcal{L}(\cup E_k)} = E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega),$$

$$3. \dim E_k = k.$$

Sea E_k^c el complementario topológico y algebraico de E_k . Si consideramos

$$\tilde{\nu}_k = \sup_{C \in \mathcal{C}_k} \min_{u \in C \cap E_{k-1}^c} b(u),$$

entonces $\tilde{\nu}_k$ está bien definido por las propiedades del índice, y es inmediato ver que $\tilde{\nu}_k \geq \nu_k > 0$. Por tanto, es suficiente probar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\nu}_k = 0$ lo que implica necesariamente que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 0$. Lo hacemos por reducción al absurdo; supongamos que existe una constante $\gamma > 0$ tal que $\tilde{\nu}_k > \gamma > 0$, para todo k . Entonces para cada k existe $C_k \in \mathcal{C}_k$ tal que

$$\tilde{\nu}_k > \min_{u \in C_k \cap E_{k-1}^c} b(u) > \gamma,$$

de donde tenemos la existencia de $u_k \in C_k \cap E_{k-1}^c$ verificando

$$\tilde{\nu}_k > b(u_k) > \gamma.$$

Es decir, tenemos construida una sucesión $\{u_k\} \subset \mathcal{M}_\alpha$ tal que $b(u_k) > \gamma > 0$, para todo k . Pero como \mathcal{M}_α es acotado en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, tenemos que para una subsucesión adecuada,

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup v \text{ débilmente en } E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega), \\ u_k &\rightarrow v \text{ fuertemente en } L_\beta^p(\Omega). \end{aligned}$$

Por tanto debe ser $b(v) \geq \gamma$. Y esto es imposible porque al ser $u_k \in E_{k-1}^c$, el límite debe ser $v = 0$.

■

Notas 2.3.7

1. En el caso $p = 2$, esta construcción da todos los autovalores por ortogonalidad.
2. En el caso $p \neq 2$ no sabemos si la construcción anterior da la sucesión completa de autovalores.

2.3.2 Propiedades del primer autovalor para el problema (EP_γ^β)

Consideremos el problema

$$(EP_\gamma^\beta) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u &= \lambda |x|^{-p\beta} |u|^{p-2} u \text{ en } \Omega, \\ B(u) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$, $\beta < (\gamma+1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y acotado con $0 \in \Omega$ y las condiciones de contorno satisfacen (2.2) y (2.3).

El primer autovalor para (EP_γ^β) está definido por

$$\lambda_1(\beta) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx \mid u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega), \|u\|_{L_\beta^p(\Omega)} = 1 \right\}.$$

En esta subsección probamos que $\lambda_1(\beta)$ es aislado y simple, al igual que ocurre con el primer autovalor del problema de Dirichlet con el operador de Laplace. El caso con $\gamma = 0$ fue demostrado por Lindqvist en [92], y seguimos sus ideas con los cambios adecuados.

Teorema 2.3.8 *El primer autovalor para el problema (EP_γ^β) , $\lambda_1(\beta)$, es aislado y simple.*

La demostración de este teorema la obtenemos como consecuencia de los cuatro lemas siguientes.

Lema 2.3.9 *Toda autofunción u_1 correspondiente a $\lambda_1(\beta)$ no cambia de signo en Ω , es decir, o bien $u_1 > 0$ ó $u_1 < 0$ en Ω .*

Demostración. Si v es una autofunción correspondiente al primer autovalor, entonces también $u = |v|$ es solución del problema de minimización que nos da el primer autovalor, por lo tanto, u es una autofunción. Por el Principio del Máximo Fuerte (véase [84]) $u > 0$ y por consiguiente v tiene signo constante. ■

Lema 2.3.10 *$\lambda_1(\beta)$ es simple, es decir, si u, v son dos autofunciones correspondientes al primer autovalor $\lambda_1(\beta)$, entonces $u = cv$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. La demostración sigue las ideas de Annane en [18] con $\gamma = \beta = 0$ y Ω regular con condición Dirichlet, y de Lindqvist en [92] que generaliza el resultado de Annane para Ω no necesariamente regular, para ello, toma una regularización de las funciones test, porque no necesariamente se verifica el Lema de Hopf.

Al igual que Lindqvist, consideramos $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $v_\varepsilon = v + \varepsilon$ y definimos

$$\eta_{1,\varepsilon} = \frac{u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p}{u_\varepsilon^{p-1}} \quad \text{y} \quad \eta_{2,\varepsilon} = \frac{v_\varepsilon^p - u_\varepsilon^p}{v_\varepsilon^{p-1}}.$$

El hecho de tomar esta regularización, no es porque $\partial\Omega$ no sea regular como en [92], sino porque no tenemos estimaciones de los cocientes $\frac{u}{v}$ y $\frac{v}{u}$ cuando nos aproximamos a $\partial\Omega$, dado que no tenemos el Lema de Hopf en todo $\partial\Omega$, y además, no es conocido un resultado como el de Dávila para $p \neq 2$ (ver [54]).

Por cálculo directo, el gradiente de la función $\eta_{1,\varepsilon}$ está dado por

$$\nabla \eta_{1,\varepsilon} = \left(1 + (p-1) \frac{v_\varepsilon^p}{u_\varepsilon^p} \right) \nabla u_\varepsilon - p \frac{v_\varepsilon^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} \nabla v_\varepsilon.$$

Por simetría, se calcula $\nabla \eta_{2,\varepsilon}$ de manera análoga. Insertando las funciones test escogidas en sus ecuaciones respectivas obtenemos:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} \left(\frac{u_\varepsilon^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v_\varepsilon^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) dx \\ &= \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \left\{ \left[1 + (p-1) \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon} \right)^p \right] |\nabla u_\varepsilon|^p + \left[1 + (p-1) \left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon} \right)^p \right] |\nabla v_\varepsilon|^p \right\} dx \\ & \quad - \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \left\{ p \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon} \right)^{p-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon \rangle + p \left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon} \right)^{p-1} |\nabla v_\varepsilon|^{p-2} \langle \nabla v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon \rangle \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) (|\nabla \log u_\varepsilon|^p - |\nabla \log v_\varepsilon|^p) dx \\ & \quad - \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} p v_\varepsilon^p |\nabla \log u_\varepsilon|^{p-2} \langle \nabla \log u_\varepsilon, (\nabla \log v_\varepsilon - \nabla \log u_\varepsilon) \rangle dx \\ & \quad - \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} p u_\varepsilon^p |\nabla \log v_\varepsilon|^{p-2} \langle \nabla \log v_\varepsilon, (\nabla \log u_\varepsilon - \nabla \log v_\varepsilon) \rangle dx, \end{aligned}$$

donde el último miembro es no negativo debido a la Identidad de Picone. Además tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} \left(\frac{u_\varepsilon^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v_\varepsilon^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}} \right) (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) dx = 0. \quad (2.27)$$

En el caso $p \geq 2$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq c(p) \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \left(\frac{1}{v_{\varepsilon}^p} + \frac{1}{u_{\varepsilon}^p} \right) |v_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon} \nabla v_{\varepsilon}|^p dx \\ &\leq \lambda_1 \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} \left(\frac{u_{\varepsilon}^{p-1}}{u_{\varepsilon}^{p-1}} - \frac{v_{\varepsilon}^{p-1}}{v_{\varepsilon}^{p-1}} \right) (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) dx. \end{aligned}$$

De acuerdo con la identidad (2.27) concluimos que $v \nabla u = u \nabla v$, y por lo tanto $u = \alpha v$ para alguna constante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Similarmente, si $1 < p < 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq c(p) \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} (u_{\varepsilon}^p + v_{\varepsilon}^p) (u_{\varepsilon} v_{\varepsilon})^p \frac{|v_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon} \nabla v_{\varepsilon}|^2}{(v_{\varepsilon} |\nabla u_{\varepsilon}| + u_{\varepsilon} |\nabla v_{\varepsilon}|)^{2-p}} dx \\ &\leq \lambda_1 \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} \left(\frac{u_{\varepsilon}^{p-1}}{u_{\varepsilon}^{p-1}} - \frac{v_{\varepsilon}^{p-1}}{v_{\varepsilon}^{p-1}} \right) (u_{\varepsilon}^p - v_{\varepsilon}^p) dx, \end{aligned}$$

de donde concluimos la demostración como en el caso $p \geq 2$. ■

Lema 2.3.11 *Si v es una autofunción correspondiente al autovalor $\lambda > 0$, $\lambda \neq \lambda_1(\beta)$, entonces v cambia de signo en Ω , es decir, $v^+ \neq 0 \neq v^-$ y*

$$|\Omega^-|_{-p\beta} \geq (\lambda C)^{-\frac{p+\varepsilon}{\varepsilon}} \text{ para algún } \varepsilon = \varepsilon(\beta) > 0,$$

donde $\Omega^- = \{x \in \Omega : v(x) < 0\}$.

Demostración. Tomando v^- como función test, por la desigualdad de Hölder para algún $\varepsilon(\beta) > 0$ tenemos:

$$\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla v|^p dx = \lambda \int_{\Omega} |x|^{-p\beta} (v^-)^p dx \leq \lambda \left(\int_{\Omega} |x|^{-p\beta} (v^-)^{p+\varepsilon} dx \right)^{\frac{p}{p+\varepsilon}} |\Omega^-|^{\frac{\varepsilon}{p+\varepsilon}}. \quad (2.28)$$

Entonces por la desigualdad de Hardy-Sobolev y (2.28) obtenemos $|\Omega^-|_{-p\beta} \geq (\lambda C)^{-\frac{p+\varepsilon}{\varepsilon}}$, donde C es la constante optimal en la desigualdad de Hardy-Sobolev. ■

Lema 2.3.12 *$\lambda_1(\beta)$ es aislado, esto es, $\lambda_1(\beta)$ es el único autovalor en el intervalo $[0, a]$ para algún número real positivo $a > \lambda_1(\beta)$.*

Demostración. Sea $\lambda \geq 0$ un autovalor y v una correspondiente autofunción. $\lambda \geq \lambda_1(\beta)$ puesto que $\lambda_1(\beta)$ es el ínfimo, entonces, $\lambda_1(\beta)$ es aislado por la izquierda. Ahora argumentamos por contradicción, es decir, suponemos que existe una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \neq \lambda_1(\beta)$ de forma que dicha sucesión converge a $\lambda_1(\beta)$. Sea $\{u_k\}$ una sucesión de autofunciones correspondiente a la anterior de autovalores con $\|u_k\|_{p,\gamma} = 1$. Podemos extraer una subsucesión, que denotamos igual, débilmente convergente en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, fuertemente convergente en $L_\beta^p(\Omega)$ y en c.t.p. de Ω a una función $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ (por simplificar, notamos $E = E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ y E' el espacio dual de E). Teniendo en cuenta que p es subcrítico, por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \|(|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u)|x|^{-p\beta}\|_{E'} &= \sup_{\|\varphi\|_E=1} |(\langle |u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u |x|^{-p\beta}, \varphi \rangle)| \\ &\leq C \sup_{\|\varphi\|_E=1} |(\langle |u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u |x|^{-p\beta}, \varphi \rangle)| \\ &\leq C \sup_{\|\varphi\|_E=1} \|\varphi\|_{L_\beta^p(\Omega)} \|(|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u)|x|^{-p\beta}\|_{L_\beta^r(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

donde $r = \frac{p}{p-1}$. Como $u_k = (-\Delta_{p,\gamma})^{-1}(\lambda_k|x|^{-p\beta}|u_k|^{p-2}u_k)$, y teniendo en cuenta que el operador $(-\Delta_{p,\gamma})^{-1}$ es continuo de E' en E , tenemos que para una subsucesión adecuada $\{u_k\}$ converge fuertemente a u en E , y consecuentemente, u es una autofunción correspondiente al primer autovalor $\lambda_1(\beta)$ con $\|u\|_{p,\gamma} = 1$. Ahora, aplicando el Teorema de Egorov ([31] Teorema IV.28) a la sucesión $\{u_k\}$, tenemos que para todo $0 < \varepsilon \ll 1$, existe un conjunto medible $A_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus A_\varepsilon| \leq \varepsilon$ y $\{u_k\}$ converge uniformemente a u en A_ε . Como consecuencia para k suficientemente grande tenemos que u_k es positiva en A_ε , pero esto es una contradicción con la conclusión del Lema 2.3.11. ■

2.3.3 Variación de las condiciones de contorno. Análisis de la convergencia del primer autovalor

En esta subsección estudiamos el comportamiento asintótico de la sucesión de autovalores $\{\lambda_1(\alpha)\}_\alpha$ y una sucesión de autofunciones asociada $\{u_\alpha\}_\alpha$ cuando o bien $\alpha \rightarrow 0$ ó

$\alpha \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$ para los problemas de autovalores

$$(EP_{\alpha}^{\gamma,\beta}) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = \lambda |x|^{-p\beta} |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega, \\ B_{\alpha}(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.29)$$

en las hipótesis generales de Ω , p , γ , β . Los resultados que presentamos en esta subsección son una extensión de algunos resultados de la Sección 1.4, donde los Teoremas 2.3.13 y 2.3.16 son probadas en el caso particular $p = 2$, $\gamma = \beta = 0$, es decir, con el operador Laplaciano.

La hipótesis de movimiento de las condiciones de frontera que hacemos cuando movemos la frontera desde un problema Mixto a uno de Neumann es la siguiente:

(H1) $\Sigma_1(\alpha_1) \subset \Sigma_1(\alpha_2)$ para $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Sigma_1(\alpha) = \mathcal{C}_1 \subset \partial\Omega$ con $\text{cap}_{p,\mu}(\mathcal{C}_1) = 0$.

Aquí, $\text{cap}_{p,\mu}(E)$ significa la (p, μ) -capacidad del conjunto E , que no es más que la p -capacidad con respecto a la medida $d\mu = |x|^{-p\gamma} dx$ (Ver por ejemplo [84]).

Cuando la convergencia es al revés, es decir, pasamos de un problema Mixto a uno de Dirichlet supondremos:

(H2) $\Sigma_2(\alpha_1) \subset \Sigma_2(\alpha_2)$ para $\alpha_1 > \alpha_2$ y $\lim_{\alpha \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)} \Sigma_2(\alpha) = \mathcal{C}_2 \subset \partial\Omega$ con $\text{cap}_{p,\mu}(\mathcal{C}_2) = 0$.

Éstas dos hipótesis son la generalización a los problemas aquí estudiados de las hipótesis que dimos en el Capítulo 1 (véase la Sección 1.4).

Teorema 2.3.13 *Sea u_{α} una solución positiva (negativa) y normalizada ($\|u_{\alpha}\|_{L_{\beta}^p(\Omega)} = 1$) del Problema (2.29) con $\lambda = \lambda_1(\alpha)$ y supongamos que se satisfacen las hipótesis (2.2), (2.3) y **(H1)**. Entonces la sucesión $\{u_{\alpha}\}_{\alpha}$ converge (para $\alpha \rightarrow 0$) fuertemente en $\mathcal{D}_{\gamma}^{1,p}(\Omega)$ a una autofunción positiva (negativa) $u_0 (\equiv \text{cte})$ del Problema de Neumann. Además,*

$$\lambda_1(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0. \quad (2.30)$$

Demostración. En primer lugar, suponemos sin pérdida de generalidad que $u_{\alpha} > 0$ en Ω . Multiplicando por u_{α} en la ecuación $-\Delta_{p,\gamma}(u_{\alpha}) = \lambda_1(\alpha) \frac{u_{\alpha}^{p-1}}{|x|^{p\beta}}$ e integrando por partes obtenemos

$$\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u_{\alpha}|^p dx = \lambda_1(\alpha) \int_{\Omega} \frac{u_{\alpha}^p}{|x|^{p\beta}} dx = \lambda_1(\alpha) \leq \lambda_1^D, \quad (2.31)$$

donde λ_1^D denota el primer autovalor del Problema de Dirichlet asociado. Como consecuencia, existe una subsucesión que notamos por $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, débilmente convergente a alguna

función $u_0 \in \mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega)$. Además, podemos suponer que

$$\begin{aligned} \nabla u_k &\rightharpoonup \nabla u_0 \quad \text{débilmente en } L^p(\Omega; |x|^{-p\gamma} dx), \\ u_k &\rightarrow u_0 \quad \text{fuertemente en } L^p(\Omega; |x|^{-p\beta} dx) \quad (\text{véase el Corolario 2.2.11}), \\ u_k &\rightarrow u_0 \quad \text{en c.t.p. de } \Omega. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Consideremos $\phi \in \mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega)$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\phi = 0$ sobre \mathcal{C}_1 puesto que $\text{cap}_{p,\mu}(\mathcal{C}_1) = 0$. Teniendo en cuenta que $\{\lambda_1(k)\}$ forma una sucesión de números reales positivos y decreciente (la demostración de este hecho es una ligera modificación del caso $p = 2$, $\gamma = \beta = 0$ visto en el Capítulo 1), $\lambda_1(k) \rightarrow \lambda_1^0 \geq 0$. Teniendo en cuenta las propiedades de convergencia (2.32) y puesto que u_k satisface

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \langle |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k, \nabla \phi \rangle dx \\ &= \lambda_1(k) \int_{\Omega} \frac{u_k^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} \phi dx + \int_{\partial\Omega} |x|^{-p\gamma} \phi |\nabla u_k|^{p-2} \frac{\partial u_k}{\partial \nu}(\phi) d\sigma \end{aligned} \quad (2.33)$$

obtenemos que u_0 , el límite débil, verifica

$$\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \langle |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0, \nabla \phi \rangle dx = \lambda_1^0 \int_{\Omega} \frac{u_0^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} \phi dx + T_0(\phi), \quad (2.34)$$

donde, teniendo en cuenta que $|x|^{-p\gamma}$ es una función regular en la frontera $\partial\Omega$, resulta $T_0 : W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Además, $T_0(\phi) = 0$ para cada $\phi \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ con $\text{sop}(\phi) \subset \partial\Omega \setminus (\bigcup_{k=n}^{\infty} \Sigma_1(k))$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Pero también verifica que $T_0(\phi) = 0$ para toda función $\phi \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ con $\text{sop}(\phi) \subset \partial\Omega \setminus \mathcal{C}_1$, y entonces $T_0 \equiv 0$ dado que por la hipótesis **(H1)** se verifica que $\text{cap}_{p,\mu}(\mathcal{C}_1) = 0$. Entonces concluimos que

$$\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \langle |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0, \nabla \phi \rangle dx = \lambda_1^0 \int_{\Omega} \frac{u_0^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} \phi dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega). \quad (2.35)$$

Como $u_0 \geq 0$ (y $u_0 \not\equiv 0$ puesto que $\|u_0\|_{L_\beta^p(\Omega)} > 0$), u_0 es solución débil del Problema de Neumann de Autovalores

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u_0 &= \lambda_1^0 \frac{u_0^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} \quad \text{en } \Omega, \\ |x|^{-p\gamma} |\nabla u_0|^{p-2} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.36)$$

entonces por los Lemas 2.3.9 y 2.3.11 concluimos que $\lambda_1^0 = 0$. Por lo tanto, hemos probado que para alguna subsucesión se verifica $\{\lambda_1(k)\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_1(k) \rightarrow 0$.

La convergencia fuerte de toda la sucesión resulta como consecuencia del hecho que $\lambda_1(\alpha)$ es decreciente.

Dos de las herramientas que utilizaremos en la demostración del Teorema 2.3.16 y más adelante son la extensión del Teorema de la Traza con los pesos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg y unas desigualdades para vectores en \mathbb{R}^N . Comenzamos en orden inverso.

Lema 2.3.14 Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual en \mathbb{R}^N . Entonces, existe una constante $C \equiv C(p)$ tal que

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq C \begin{cases} |x - y|^p, & \text{si } p \geq 2, \\ \frac{|x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}} & \text{si } 1 < p < 2. \end{cases} \quad (2.37)$$

Teorema 2.3.15 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y regular con $0 \notin \partial\Omega$. Supongamos $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$ entonces se verifica la inclusión continua $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow W^{1-1/p,p}\partial\Omega$.

Demostración. Si $0 \notin \Omega$ entonces el resultado es trivial por el Teorema clásico de la Traza. Si $0 \in \Omega$, consideramos $\varepsilon > 0$ verificando que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset \Omega$.

Definamos $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$. Como $0 \notin \Omega_\varepsilon$, por el Teorema clásico de la Traza (véase [8] por ejemplo)

$$\|u\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq C_0 \|u\|_{E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega_\varepsilon)}, \quad (2.38)$$

por tanto, teniendo en cuenta que $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon$,

$$\|u\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon)} \leq C_0 \|u\|_{E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega_\varepsilon)} \leq C_0 \|u\|_{E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)}$$

que termina la demostración.

Teorema 2.3.16 Sea u_α una solución positiva (negativa) y normalizada ($\|u_\alpha\|_{L_\beta^p(\Omega)} = 1$) del problema (EP_α) con $\lambda = \lambda_1(\alpha)$ y supongamos que se satisfacen las hipótesis (2.2), (2.3) y (H2). Entonces la sucesión $\{u_\alpha\}$ converge fuertemente en $\mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega)$ a una autofunción positiva (negativa) u_0 del Problema de Dirichlet. Además,

$$\lambda_1(\alpha) \longrightarrow \lambda_1^D \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega).$$

Demostración. Como en la demostración del Teorema 2.3.13 podemos suponer que existe alguna subsucesión tal que $u_k \rightharpoonup u_0$ en $\mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega)$ para alguna función $u_0 \in \mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega)$, y además, u_k verifica (2.32). Consideremos $\phi \in \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$ como función test, entonces tenemos

$$\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} (|\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k, \nabla \phi) dx = \lambda_1(k) \int_{\Omega} \frac{u_k^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} \phi dx.$$

Además, $u_0 \geq 0$ ($u_0 \not\equiv 0$), y como antes, $\lambda_1(k) \rightarrow \lambda_1^0 \in (0, \lambda_1^D]$. Por tanto, argumentando de manera similar a la demostración de la proposición anterior pero utilizando **(H2)** en lugar de **(H1)**, tenemos que u_0 es solución débil del problema de autovalores siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u_0 &= \lambda_1^0 \frac{u_0^{p-1}}{|x|^{-p\beta}}, & \text{en } \Omega, \\ u_0 &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Concluimos que $\lambda_1^0 \geq \lambda_1^D$ y, por los Lemas 2.3.9 y 2.3.11, tenemos que $\lambda_1^0 = \lambda_1^D$, puesto que $u_0 > 0$ es una autofunción del Problema de Dirichlet.

Ahora, probamos la convergencia fuerte de esa subsucesión. Consideramos la diferencia

$$-\Delta_{p,\gamma} u_k - (-\Delta_{p,\gamma} u_0) = \lambda_1(k) \frac{u_k^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} - \lambda_1^D \frac{u_0^{p-1}}{|x|^{-p\beta}}.$$

Usando $u_k - u_0$ como función test obtenemos:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} (|\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0, \nabla (u_k - u_0)) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\lambda_1(k) \frac{u_k^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} - \lambda_1^D \frac{u_0^{p-1}}{|x|^{-p\beta}} \right) (u_k - u_0) dx - \int_{\Sigma_2(k)} |x|^{-p\gamma} u_k |\nabla u_0|^{p-2} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\sigma(x). \end{aligned} \quad (2.39)$$

La integral sobre la frontera converge a cero para $k \rightarrow \infty$ debido a la regularidad elíptica, ver por ejemplo [123] y [60]. Más precisamente, tenemos que $u_0 \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)})$ para cada $0 < \varepsilon < 1$; y por el Teorema de la Traza 2.3.15 tenemos la inclusión continua $\mathcal{D}_\gamma^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ que nos permite probar junto con (2.32) la convergencia débil $u_k \rightharpoonup u_0$ en $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

La integral en Ω en el lado derecho de (2.39) converge a cero por la convergencia fuerte de u_k a u_0 en $L_\beta^p(\Omega)$ y que $\lambda_1(k) \rightarrow \lambda_1^D$. Como consecuencia tenemos que $I_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$. Ahora tenemos dos casos a estudiar:

1. $p \geq 2$, entonces por la desigualdad (2.37) existe una constante positiva $C = C(p)$ tal que

$$I_k \geq C \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla(u_k - u_0)|^p dx.$$

Por tanto, obtenemos convergencia fuerte de la subsucesión $\{u_k\}$.

2. $1 < p < 2$, de nuevo por (2.37) existe una constante positiva $C = C(p)$ tal que

$$I_k \geq C \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \frac{|\nabla(u_k - u_0)|^2}{(|\nabla u_k| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \geq \frac{\left(\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla(u_k - u_0)|^p dx \right)^{\frac{p}{2}}}{\left(\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} (|\nabla u_k| + |\nabla u_0|)^{2-p} dx \right)^{\frac{2-p}{p}}},$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Hölder. Teniendo en cuenta que

$$c_1 \leq \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} (|\nabla u_k| + |\nabla u_0|)^{2-p} dx \leq c_2$$

para algunas constantes positivas c_1, c_2 , concluimos que existe una nueva constante $\tilde{C}(p) > 0$ tal que

$$I_k \geq \tilde{C}(p) \left(\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla(u_k - u_0)|^p dx \right)^{2/p},$$

y con ello, conseguimos la convergencia fuerte de u_k a u_0 en $\mathcal{D}_{\gamma}^{1,p}(\Omega)$.

Finalmente, demostramos que converge la sucesión completa. Basta argumentar por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe una subsucesión que no converge, como antes, podemos extraer una nueva subsucesión convergente a u_0 y λ_1^p , con lo que concluimos. ■

2.4 Bifurcación

A lo largo de esta sección, consideramos, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$; $\beta, \mu \leq (\gamma + 1)$, y el exponente crítico $p_{\gamma,\mu}^*$ definido en (2.5). Por lo tanto, el término $|x|^{-q\mu} u^{q-1}$ es “subcrítico”, para $q < p_{\gamma,\mu}^*$. Además suponemos que $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,p,\gamma}$, es decir, $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ no se alcanza (ver la Sección 3.2.2 del Capítulo 3). En el caso $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,p,\gamma}$, la constante $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza y el problema de la bifurcación es diferente, dado que

$\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se comporta como un autovalor, que se puede demostrar es simple, pero se desconoce si es aislado.

Comenzamos con un resultado de no existencia a través de una generalización de la Identidad de Pohozaev.

Teorema 2.4.1 *Supongamos que $\gamma \leq \mu \leq (\gamma + 1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado verificando que $0 \in \Omega$ y existe un punto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\langle x - x_0, \nu \rangle > 0$ sobre Σ_1 , $\langle x - x_0, \nu \rangle = 0$ sobre Σ_2 , donde ν es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. Entonces el problema doblemente crítico*

$$(P_\lambda) \equiv \begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}} + |x|^{-p^*_{\gamma,\mu}} u^{p^*_{\gamma,\mu}-1} \quad \text{en } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.40)$$

no tiene solución positiva.

Demostración. Supongamos que tenemos la regularidad necesaria en los cálculos siguientes, en caso contrario, podemos utilizar un argumento de aproximación como en [81]. Multiplicando en la ecuación de (P_λ) por $\langle x - x_0, \nabla u \rangle$ e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{N - p(\gamma + 1)}{p} \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx + \frac{p-1}{p} \int_{\Sigma_1} \langle x - x_0, \nu \rangle |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p d\sigma \\ & - \frac{1}{p} \int_{\Sigma_2} \langle x - x_0, \nu \rangle |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p d\sigma \\ &= \lambda \frac{N - p(\gamma + 1)}{p} \int_{\Omega} \frac{u^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} dx + \frac{N - p^*_{\gamma,\mu}}{p^*_{\gamma,\mu}} \int_{\Omega} \frac{u^{p^*_{\gamma,\mu}}}{|x|^{p^*_{\gamma,\mu}}} dx \\ & - \int_{\Sigma_2} \langle x - x_0, \nu \rangle \left(\frac{\lambda u^p}{p|x|^{p(\gamma+1)}} + \frac{u^{p^*_{\gamma,\mu}}}{p^*_{\gamma,\mu}|x|^{p^*_{\gamma,\mu}}} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si u fuese solución del problema (P_λ) entonces

$$\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx = \lambda \int_{\Omega} \frac{u^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} dx + \int_{\Omega} \frac{u^{p^*_{\gamma,\mu}}}{|x|^{p^*_{\gamma,\mu}}} dx. \quad (2.42)$$

Como consecuencia de (2.41) y (2.42) concluimos que

$$\begin{aligned}
 & \frac{p-1}{p} \int_{\Sigma_1} \langle x - x_0, \nu \rangle |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p d\sigma - \frac{1}{p} \int_{\Sigma_2} \langle x - x_0, \nu \rangle |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p d\sigma \\
 &= \left(\frac{N - p_{\gamma,\mu}^*}{p_{\gamma,\mu}^*} - \frac{N - p(\gamma+1)}{p} \right) \int_{\Omega} \frac{u^{p_{\gamma,\mu}^*}}{|x|^{p_{\gamma,\mu}^*}} dx \\
 & \quad - \int_{\Sigma_2} \langle x - x_0, \nu \rangle \left(\frac{\lambda u^p}{p|x|^{p(\gamma+1)}} + \frac{u^{p_{\gamma,\mu}^*}}{p_{\gamma,\mu}^* |x|^{p_{\gamma,\mu}^*}} \right) d\sigma.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Por tanto, el segundo miembro en (2.43) es nulo, mientras que el primero es positivo lo que resulta una contradicción. ■

Este teorema está relacionado con un resultado de no existencia establecido en [94].

Nota 2.4.2 En particular deducimos que no hay soluciones positivas de (P_λ) en las hipótesis del Teorema 2.4.1, en el siguiente cono:

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \left\{ x_N + 1 > \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2} \right\} \cap \left\{ x_1^2 + \cdots + (x_N + 1)^2 < 2 \right\}, \\
 \Sigma_1 &= \partial\Omega \cap \{x_1^2 + \cdots + (x_N + 1)^2 = 2\}, \\
 \Sigma_2 &= \partial\Omega \cap \left\{ x_N + 1 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2} \right\},
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

con $x_0 = (0, \dots, 0, -1)$.

Lema 2.4.3 (Comparación) Supongamos que $\mu \leq (\gamma+1)$, $q < p$. Sean $v, u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ subsolución y supersolución, respectivamente, del problema:

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} \omega = \lambda \frac{\omega^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}} + |x|^{-q\mu} \omega^{q-1} & \text{en } \Omega, \\ \omega > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(\omega) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.45}$$

Entonces $v \leq u$.

Demostración. Consideremos

$$\frac{-\Delta_{p,\gamma}u}{u^{p-1}} - \frac{-\Delta_{p,\gamma}v}{v^{p-1}} \geq |x|^{-q\mu}(u^{q-p} - v^{q-p}).$$

Multiplicando por la función test $(v^p - u^p)_+$ e integrando en la última desigualdad obtenemos:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{-\Delta_{p,\gamma}u}{u^{p-1}} - \frac{-\Delta_{p,\gamma}v}{v^{p-1}} \right) (v^p - u^p)_+ dx \geq \int_{\Omega} |x|^{-q\mu}(u^{q-p} - v^{q-p})(v^p - u^p)_+ dx \geq 0.$$

Sea $\omega = (v^p - u^p)_+$ una función test, calculamos su gradiente,

$$\nabla \omega = p(v^{p-1}\nabla v - u^{p-1}\nabla u)\chi_{[v>u]}$$

entonces resulta que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{-\Delta_{p,\gamma}u}{u^{p-1}} - \frac{-\Delta_{p,\gamma}v}{v^{p-1}} \right) \omega dx \\ &= \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \left(|\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \left(\frac{\omega}{u^{p-1}} \right) \rangle - |\nabla v|^{p-2} \langle \nabla v, \nabla \left(\frac{\omega}{v^{p-1}} \right) \rangle \right) dx \\ &= \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, p \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} \nabla v - \left(p + \frac{p-1}{u^p} (v^p - u^p) \right) \nabla u \rangle \chi_{[v>u]} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla v|^{p-2} \langle \nabla v, p \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} \nabla u - \left(p - \frac{p-1}{v^p} (v^p - u^p) \right) \nabla v \rangle \chi_{[v>u]} dx \\ &= \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \left(p \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - |\nabla u|^p \left(1 - (p-1) \frac{v^p}{u^p} \right) \right) \chi_{[v>u]} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \left(p \frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} |\nabla v|^{p-2} \langle \nabla v, \nabla u \rangle - |\nabla v|^p \left(1 - (p-1) \frac{u^p}{v^p} \right) \right) \chi_{[v>u]} dx. \end{aligned}$$

Por la identidad de Picone, Lema 2.2.1, tenemos que los dos últimos términos en la anterior desigualdad son no positivos, y como consecuencia, se verifica que la medida del conjunto $\{x \in \Omega \mid v(x) > u(x)\}$ es nula. ■

Este lema de comparación implica de manera inmediata unicidad para el Problema (2.45).

2.4.1 Bifurcación desde infinito

En esta subsección estudiamos el fenómeno de bifurcación desde infinito. Consideramos el problema

$$(P_\gamma^{\omega_\beta}) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = \lambda u^{p-1} \omega_\beta(x) + |x|^{-q\mu} u^{q-1} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $1 < q < p$, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$; $\beta, \mu < (\gamma+1)$, y la función ω_β definida por (2.4). Cabe notar que $\omega_\beta(x)$ es una pequeña modificación del potencial $|x|^{-p\beta}$, para el cual hemos probado, en la Sección 2.3, la existencia de una sucesión de autovalores y las propiedades del primero. Los mismos cálculos pueden hacerse con la función $\omega_\beta(x)$ en lugar de $|x|^{-p\beta}$.

Nota 2.4.4 *El único motivo por el que tomamos ω_β en lugar de $|x|^{-p\beta}$ es por tener monotonía de $\lambda_1(\omega_\beta)$ cuando $\beta \nearrow (\gamma+1)$, dado que Ω no tiene porqué estar contenido en $B_1(0)$.*

Precisamente, demostramos en el Teorema 2.4.8 que $\lambda_1(\omega_\beta)$, que denota el primer autovalor del problema de autovalores:

$$(EP_\gamma^{\omega_\beta}) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = \lambda \omega_\beta(x) |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

es el único punto de bifurcación desde infinito para soluciones positivas del problema $(P_\gamma^{\omega_\beta})$. Además, existe una rama de soluciones (λ, u_λ) para el problema $(P_\gamma^{\omega_\beta})$ tal que $\|u_\lambda\|_\infty \rightarrow \infty$ para $\lambda \nearrow \lambda_1(\omega_\beta)$. Se trata de una extensión de un resultado de [14].

Al final de esta subsección, como consecuencia del resultado de bifurcación para el problema $(P_\gamma^{\omega_\beta})$, demostramos que $\Lambda_{N,p,\gamma}$ es el único punto de bifurcación desde infinito de soluciones positivas de

$$(P_\gamma) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}} + |x|^{-q\mu} u^{q-1} & \text{en } \Omega, \ 1 < q < p; \ \mu \leq (\gamma+1), \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

El método utilizado sigue las ideas de [71] con los cambios apropiados. El resultado que sigue formula de manera precisa los anteriores comentarios.

Teorema 2.4.5 $\Lambda_{N,p,\gamma}$ es el único punto de bifurcación desde infinito del problema (P_γ) . Además, existe un continuo de soluciones del problema (P_λ) , $(\lambda, u_\lambda) \in (0, \Lambda_{N,p,\gamma}) \times E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, que contiene el punto $(0, u_0)$, donde u_0 es la solución única del problema (P_γ) para $\lambda = 0$, y que explota para $\lambda \nearrow \Lambda_{N,p,\gamma}$.

Para estudiar el fenómeno de bifurcación en el problema $(P_\gamma^{\omega_\beta})$, utilizamos el cambio de variables $v = \lambda^{\frac{1}{p-q}} u$, y estudiamos la bifurcación en el problema que satisface v :

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} v &= \lambda(\omega_\beta(x)v^{p-1} + |x|^{-q\mu}v^{q-1}), & v > 0 & \text{ en } \Omega \\ B(v) &= 0 & \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

En lo que sigue, suponemos que $f(x, s) = \omega_\beta(x)s^{p-1} + |x|^{-q\mu}s^{q-1}$.

Consideremos el espacio de Banach $Y = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$, equipado con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y denotamos la bola de radio r en Y por $B_r = \{u \in Y : \|u\|_\infty < r\}$ y definimos la aplicación

$$\Phi_\lambda : Y \rightarrow Y, \quad \text{por} \quad \Phi_\lambda(u) = u - (-\Delta_{p,\gamma})^{-1}(\lambda f(x, u)).$$

Teniendo en cuenta la regularidad Hölder obtenida en la Sección 4.2, resulta que Φ_λ es una perturbación compacta de la identidad.

Para el estudio de la bifurcación desde infinito del problema (P_γ^β) definimos $z = u/\|u\|_\infty^2$, $u \neq 0$, y consideramos

$$\Psi_\lambda(z) = z - \|z\|_\infty^2 \left[(-\Delta_{p,\gamma})^{-1} \left(\lambda f \left(x, \frac{z}{\|z\|_\infty^2} \right) \right) \right], \quad z \neq 0, \quad \Psi_\lambda(0) = 0.$$

En estos términos, se verifica que λ es un punto de bifurcación desde la solución trivial $\Psi_\lambda(z) = 0$ si y sólo si λ es un punto de bifurcación desde infinito para $\Phi_\lambda(u) = 0$.

En la demostración del resultado general utilizamos los lemas siguientes (en los que $i(\Psi_\lambda)$ denota el índice de Leray Schauder respecto a 0, véanse [89] y [12]).

Lema 2.4.6 Sea $\lambda \in (0, \lambda_1(\omega_\beta))$ entonces $i(\Psi_\lambda) = 1$.

Demostración. Dado $0 < \lambda^* < \lambda_1(\omega_\beta)$ existe $R > 0$ tal que $\Psi_\lambda(u) \neq 0$ siempre que $\lambda \in [0, \lambda^*]$ y $u \in Y$ con $\|u\|_\infty \geq R$. En caso contrario, existiría una sucesión $\{(u_k, \lambda_k)\}$ tal que $\|u_k\|_\infty \rightarrow \infty$, $\lambda_k \rightarrow \bar{\lambda}$ y $\Psi_{\lambda_k}(u_k) = 0$. Tomando $v_k = u_k/\|u_k\|_\infty^{-1}$, por las propiedades de f y la regularidad elíptica establecida en el Teorema 4.2.1, podemos concluir que para una subsucesión adecuada (que denotamos de igual manera) $v_k \rightarrow \bar{v}$.

Ahora, teniendo en cuenta que $u_k = -(\Delta_{p,\gamma})^{-1}(\lambda_k f(x, u_k))$ obtenemos $-\Delta_{p,\gamma}(v_k) = \lambda_k(\omega_\beta(x)v_k^{p-1} + |x|^{-q\mu}v_k^{q-1}\|u_k\|_\infty^{q-p})$. Pasando al límite con $k \rightarrow \infty$ resulta que $-\Delta_{p,\gamma}\bar{v} = \bar{\lambda}\omega_\beta(x)\bar{v}^{p-1}$, además $\bar{v} \geq 0$ y $\|\bar{v}\|_\infty = 1$. Entonces por los Lemas 2.3.9 y 2.3.11, tenemos que $\bar{\lambda} = \lambda_1(\omega_\beta) \notin [0, \lambda^*]$, que es una contradicción.

Por consiguiente, $\Psi_{t\lambda}(z) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$ y todo z con $0 < \|z\|_\infty \leq R^{-1}$, entonces tomando $0 < \varepsilon \leq R^{-1}$ y teniendo en cuenta la invarianza por homotopía del grado topológico, concluimos:

$$\deg(\Psi_\lambda, B_\varepsilon, 0) = \deg(Id, B_\varepsilon, 0) = 1,$$

por tanto $i(\Psi_\lambda) = 1$. ■

Lema 2.4.7 Sea $\lambda > \lambda_1(\omega_\beta)$, entonces $i(\Psi_\lambda) = 0$.

Demostración. Primero, probemos que si $\lambda > \lambda_1(\omega_\beta)$, entonces existe $R > 0$ tal que el problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma}(u) &= \lambda f(x, u) + \tau \text{ en } \Omega, \\ B(u) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

no tiene solución positiva con $\|u\|_\infty \geq R$, para todo $\tau \geq 0$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existen dos sucesiones $\{u_k\}$ y $\{\tau_k\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $\|u_k\|_\infty \rightarrow \infty$ para $k \rightarrow \infty$, y $-\Delta_{p,\gamma}(u_k) = \lambda f(x, u_k) + \tau_k$. Entonces $v_k = u_k\|u_k\|_\infty^{-1}$ verifica la ecuación

$$-\Delta_{p,\gamma}v_k = \lambda \left(\omega_\beta(x)v_k^{p-1} + |x|^{-q\mu}v_k^{q-1}\|u_k\|_\infty^{q-p} \right) + \tau_k\|u_k\|_\infty^{1-p}. \quad (2.46)$$

Pasando a una subsucesión, si es necesario, podemos suponer que $v_k \rightarrow \bar{v}$ uniformemente y, o bien (a) $\tau_k\|u_k\|_\infty^{1-p} \rightarrow c \geq 0$, ó bien (b) $\tau_k\|u_k\|_\infty^{1-p} \rightarrow \infty$.

En el caso (a), el lado derecho de (2.46) permanece acotado en Y , y podemos suponer, para una subsucesión adecuada, que $v_k \rightarrow \bar{v} \in Y$ uniformemente debido al Teorema 4.2.19. Así, tomando límites,

$$-\Delta_{p,\gamma}\bar{v} = \lambda\omega_\beta(x)\bar{v}^{p-1} + c \geq (\lambda_1(\omega_\beta) + \varepsilon)\omega_\beta(x)\bar{v}^{p-1} \geq 0, \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \lambda - \lambda_1(\omega_\beta).$$

Ahora, tomando $\rho\phi_1$ con $0 < \rho < 1$, ϕ_1 una autofunción positiva con $\|\phi_1\|_\infty = 1$, tenemos que por comparación $\rho\phi_1 \leq \bar{v}$. Entonces, por el método de iteración, encontramos una solución $w \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ de la ecuación $-\Delta_{p,\gamma}w = (\lambda_1(\omega_\beta) + \varepsilon)\omega_\beta(x)w^{p-1}$ con $\rho\phi_1 \leq w \leq \bar{v}$.

Esto es una contradicción con el aislamiento del primer autovalor $\lambda_1(\omega_\beta)$, establecido en el Lema (2.3.12), dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño.

En el caso (b), para k suficientemente grande se verifica

$$-\Delta_{p,\gamma} v_k \geq \lambda \omega_\beta(x) v_k^{p-1} \geq 0$$

y argumentamos como en el caso (a).

En particular, podemos concluir que la ecuación

$$-\Delta_{p,\gamma} u = \lambda f(x, u) + t \|u\|_\infty^{2(p-1)}$$

no tiene solución positiva si $\|u\|_\infty \geq R$, para todo $t \in [0, 1]$. Tomando $z = u \|u\|_\infty^{-2}$, llegamos a que la ecuación

$$-\Delta_{p,\gamma}(z) = \|z\|_\infty^{2(p-1)} \lambda f\left(x, \frac{z}{\|z\|_\infty^2}\right) + t$$

no tiene solución positiva si $0 < \|z\|_\infty \leq R^{-1}$, para todo $t \in [0, 1]$. Así pues, la homotopía $H : [0, 1] \times Y \rightarrow Y$ definida por:

$$H(t, z) = z - \left((-\Delta_{p,\gamma})^{-1} \left(\|z\|_\infty^{2(p-1)} f\left(x, \frac{z}{\|z\|_\infty^2}\right) + t \right) \right)$$

verifica que $H(t, z) \neq 0$ para todo $z \in Y$ con $0 < \|z\|_\infty \leq R^{-1}$ y todo $t \in [0, 1]$. Por tanto, para todo $0 < \varepsilon \leq R^{-1}$ obtenemos

$$\deg(\Psi_\lambda, B_\varepsilon, 0) = \deg(H(0, \cdot), B_\varepsilon, 0) = \deg(H(1, \cdot), B_\varepsilon, 0) = 0,$$

por tanto, $i(\Psi_\lambda) = 0$. ■

Teorema 2.4.8 *Sea $\lambda_1(\omega_\beta)$ el primer autovalor del problema $(EP_\gamma^{\omega_\beta})$. Entonces, $\lambda_1(\omega_\beta)$ es el único punto de bifurcación desde infinito de soluciones positivas del problema $(P_\gamma^{\omega_\beta})$. Precisamente, existe una rama de soluciones, Σ_β , del problema $(P_\gamma^{\omega_\beta})$ tal que $\|u_\lambda\|_\infty \rightarrow \infty$ para $\lambda \nearrow \lambda_1(\omega_\beta)$.*

Demostración. Los argumentos son similares a los correspondientes en [14] y [16], por tanto, no haremos demasiado énfasis en los detalles. Por el Lema 2.4.6, tenemos que $i(\Psi_\lambda) = 1$ para todo $0 < \lambda < \lambda_1(\omega_\beta)$, mientras que por el Lema 2.4.7, resulta que $i(\Psi_\lambda) = 0$

para todo $\lambda > \lambda_1(\omega_\beta)$, donde $i(\cdot)$ significa, como ya dijimos, el índice de Leray-Schauder respecto a 0. Este cambio de índice permite probar que el conjunto de soluciones de $\Psi_\lambda = 0$ contiene un continuo de soluciones bifurcando desde $(\lambda_1(\omega_\beta), 0)$, que corresponde a una rama de soluciones del problema $(P_\gamma^{\omega_\beta})$ arrancando desde infinito en $\lambda = \lambda_1(\omega_\beta)$ (véase también [111]).

La unicidad de $\lambda_1(\omega_\beta)$ como punto de bifurcación desde infinito, para las soluciones positivas de $\Phi_\lambda(u) = 0$, se obtiene con los mismos argumentos que la demostración del Lema 2.4.6. En efecto, supongamos que existe otro, digamos $\lambda_\infty \neq \lambda_1(\omega_\beta)$, en particular, existe una sucesión $\{(u_k, \lambda_k)\}$ tal que $\|u_k\|_\infty \rightarrow \infty$, $\lambda_k \rightarrow \lambda_\infty$ y $\Psi_{\lambda_k}(u_k) = 0$. Tomando $v_k = u_k \|u_k\|_\infty^{-1}$, por las propiedades de f y la regularidad C^α , establecida en el Teorema 4.2.1, podemos concluir que para una subsucesión adecuada (que denotamos igual) $v_k \rightarrow \bar{v}$ uniformemente y en energía. Ahora, teniendo en cuenta que $u_k = -(\Delta_{p,\gamma})^{-1}(\lambda_k f(x, u_k))$ obtenemos $-\Delta_{p,\gamma}(v_k) = \lambda_k(\omega_\beta(x)v_k^{p-1} + |x|^{-q\mu}v_k^{q-1}\|u_k\|_\infty^{q-p})$. Pasando al límite con $k \rightarrow \infty$ resulta que $-\Delta_{p,\gamma}\bar{v} = \bar{\lambda}\omega_\beta(x)\bar{v}^{p-1}$, además, $\bar{v} \geq 0$ y $\|\bar{v}\|_\infty = 1$. Entonces, por los Lemas 2.3.9 y 2.3.11, tenemos que $\lambda_\infty = \lambda_1(\omega_\beta)$ que es una contradicción. ■

En el siguiente lema comparamos la mejor constante de la desigualdad de Hardy-Sobolev con los autovalores de los problemas de autovalores aproximantes, $(EP_\gamma^{\omega_\beta})$.

Lema 2.4.9 *Sea $\lambda_1(\omega_\beta)$ el primer autovalor del problema $(EP_\gamma^{\omega_\beta})$ como antes. Entonces, $\lambda_1(\omega_\beta) \geq \Lambda_{N,p,\gamma}$, y además, $\lim_{\beta \nearrow (\gamma+1)} \lambda_1(\omega_\beta) = \Lambda_{N,p,\gamma}$.*

Demostración. La primera desigualdad es consecuencia directa de la definición del primer autovalor por el cociente de Rayleigh. También es sencillo comprobar que $\{\lambda_1(\omega_\beta)\}$ es una sucesión no creciente. Entonces, tenemos que probar que el límite superior no puede ser mayor que $\Lambda_{N,p,\gamma}$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\lim_{\beta \nearrow (\gamma+1)} \lambda_1(\omega_\beta) = \Lambda_{N,p,\gamma} + \rho$. Entonces, podemos elegir $\varphi \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ tal que

$$\frac{\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla \varphi|^p dx}{\int_{\Omega} |x|^{-p(\gamma+1)} |\varphi|^p dx} \leq \Lambda_{N,p,\gamma} + \rho/2.$$

Como consecuencia,

$$\lambda_1(\omega_\beta) \leq \frac{\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla \varphi|^p dx}{\int_{\Omega} \omega_\beta(x) \varphi^p dx},$$

que es una contradicción, dado que el último miembro en esta desigualdad tiene que ser menor que $\Lambda_{N,p,\gamma} + \rho$ para $(\gamma + 1) - \beta > 0$ suficientemente pequeño. ■

El lema siguiente lo utilizamos en la demostración del Teorema 2.4.5.

Lema 2.4.10 *Sea $\{(u_\beta, \mu_\beta)\}$ una sucesión de soluciones de los problemas $(P_\gamma^{\omega_\beta})$, con $\lambda = \mu_\beta$ tal que:*

- i) $(u_\beta, \mu_\beta) \in \Sigma_\beta$.
- ii) $\mu_\beta \rightarrow \lambda_0 \in (0, \Lambda_{N,p,\gamma})$ para $\beta \nearrow (\gamma + 1)$.
- iii) $\|u_\beta\|_{E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)} \leq C$ para todo $\beta < (\gamma + 1)$.

Entonces existe una subsucesión $u_{\beta_n} = u_n$ tal que $u_n \rightarrow u_0$ cuando $n \rightarrow \infty$ fuerte en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, con u_0 solución del Problema (P_γ) para $\lambda = \lambda_0$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que no existe ninguna subsucesión fuertemente convergente en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$. Por el Teorema 4.4.1 tenemos que existen dos medidas acotadas $\mu, \eta \geq 0$ tales que $|x|^{-p\gamma} |\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu \geq |x|^{-p\gamma} |\nabla u_0|^p + \mu_0 \delta_0$, $\frac{|u_n|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} \rightharpoonup \frac{|u_0|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} + \eta_0 \delta_0$ en sentido de las medidas, donde $\mu_0 \geq \Lambda_{N,p,\gamma} \eta_0 \geq 0$. Además, $u_n \rightharpoonup u_0$ débil en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, $u_n \rightarrow u_0$ fuerte en $L_\mu^q(\Omega)$ y $u_n \rightarrow u_0$ en c.t.p. de Ω . Teniendo en cuenta que cada u_n es solución de $(EP_\gamma^{\omega_{\beta_n}})$, se comprueba que u_0 es solución de (P_γ) con $\lambda = \lambda_0$. En particular, dada $\varphi \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ se verifica:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} \langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n, \nabla \phi \rangle |x|^{-p\gamma} dx - \mu_n \int_{\Omega} u_n^{p-1} \phi \omega_n(x) dx - \int_{\Omega} u_n^{q-1} \phi |x|^{-q\mu} dx \\
 &= \left\{ \int_{\Omega} \langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n, \nabla \phi \rangle |x|^{-p\gamma} dx - \mu_n \int_{\Omega} \frac{u_n^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}} \phi dx - \int_{\Omega} u_n^{q-1} \phi |x|^{-q\mu} dx \right\} \\
 &\quad + \mu_n \int_{\Omega} (|x|^{-p(\gamma+1)} - \omega_n(x)) u_n^{p-1} \phi dx,
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde el último sumando en (2.47) converge a cero por el Lema de Fatou. Sea φ_ϵ una función de corte en $B_\epsilon(0)$, es decir, $\varphi \in C^\infty$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq \epsilon$, $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2\epsilon$ y $|\nabla \varphi_\epsilon| \leq 4\epsilon$, tomando $\varphi = u_n \phi$ tenemos como en (2.47):

$$0 \geq \int_{B_\epsilon(0)} d\mu - \int_{B_\epsilon(0)} d\eta + o(1)$$

y pasando al límite con $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$0 \geq \mu_0 - \lambda_0 \eta_0 \geq (\Lambda_{N,p,\gamma} - \lambda_0) \eta_0 \geq 0,$$

por tanto, $\eta_0 = 0$. Finalmente, concluimos por el Lema de Brezis-Lieb (véase [35]), que $\frac{u_n}{|x|^{(\gamma+1)}} \rightarrow \frac{u_0}{|x|^{(\gamma+1)}}$ fuertemente en $L^p(\Omega)$, y utilizando la continuidad del operador inverso, $(-\Delta_{p,\gamma})^{-1} : (E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))' \rightarrow E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, se concluye que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u_0$ fuertemente en $[L^p(\Omega)]^N$, lo que demuestra el resultado. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.4.5:

El Lema 2.4.10 garantiza la condición i) del Lema 1.5.9. Es más, el límite inferior del conjunto de ramas es no vacío, ya que por unicidad, todas las ramas cruzan el eje $\lambda = 0$ en el mismo punto. Por tanto, podemos pasar al límite gracias al Lema 1.5.9.

Para terminar, probamos que la rama límite es no degenerada. En primer lugar, probamos que las ramas aproximantes no colapsan en el eje vertical. Por unicidad para $\lambda = 0$, si tuviéramos una sucesión $\{u_{\beta_n}\}$ de soluciones de los problemas aproximados tales que $\lambda_{\beta_n} \rightarrow 0$, entonces por la condición de Palais-Smale tendríamos que $u_{\beta_n} \rightarrow u_0$, la solución correspondiente a $\lambda = 0$. Por otro lado, no es difícil demostrar que las ramas aproximantes no degeneran en el eje horizontal, en efecto, si u_n es una solución correspondiente a λ_n , entonces,

$$J_{\beta_n}(u_n, \lambda_n) = \min J_{\beta_n}(u, \lambda_n) \leq \min \left(\frac{1}{p} \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} |x|^{-q\mu} u^q dx \right) = -C_q < 0.$$

Así pues, las ramas no colapsan en el eje horizontal.

Ahora probamos que $\Lambda_{N,p,\gamma}$ es el único punto de bifurcación desde infinito del problema (P_λ) . Por un argumento de dilatación, supongamos que existe otro punto, digamos, λ_0 , y una sucesión $\{(u_k, \lambda_k)\}$ con $\|u_k\|_{p,\gamma} = M_k \rightarrow \infty$ y $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$. Es evidente que $\lambda_0 \leq \Lambda_{N,p,\gamma}$, si definimos $v_k = M_k^{-1} u_k$, se verifica que:

$$-\Delta_{p,\gamma} v_k = \lambda_k \frac{v_k^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}} + M_k^{q-p} |x|^{-q\mu} v_k^{q-1}.$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla v_k|^p dx - M_k^{q-p} \int_{\Omega} |x|^{-q\mu} v_k^q dx}{\int_{\Omega} \frac{v_k^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} dx} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - M_k^{q-p} C}{1/\Lambda_{N,p,\gamma}} = \Lambda_{N,p,\gamma},\end{aligned}$$

donde la desigualdad es consecuencia de la de Hardy-Sobolev, y C es una constante positiva que sólo depende de N , p , q y Ω . ■

2.4.2 Bifurcación desde cero

En esta subsección consideramos el problema,

$$(P_{s,\lambda}^{\omega_\beta}) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma}(u) &= \lambda \omega_\beta(x) u^{s-1} + |x|^{-q\mu} u^{q-1} & \text{en } \Omega, \\ u &> 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.48)$$

con $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$, $1 < s \leq p < q < p_{\gamma,\mu}^*$ (ver (2.5)), $\beta \leq (\gamma+1)$, $\mu < (\gamma+1)$ y $\omega_\beta(x)$ como en la subsección previa. Bajo estas condiciones, en el caso $s = p$, probamos que existe un continuo no acotado C_β de soluciones del problema $(P_{\alpha,\lambda}^{\omega_\beta})$ bifurcando a la izquierda desde $(\lambda_1(\beta), 0)$. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.11 *Consideremos el problema $(P_{s,\lambda}^{\omega_\beta})$ con $s = p < q$; $\beta, \mu < (\gamma+1)$. Entonces $\lambda_1(\omega_\beta)$ es el único punto de bifurcación desde la solución trivial. Precisamente, existe una rama no acotada de soluciones arrancando desde $(\lambda, \|u\|_\infty) = (\lambda_1(\omega_\beta), 0)$.*

Demostración. Basta seguir los pasos de la demostración del Teorema 2.4.8 puesto que de nuevo el Teorema 4.2.19 nos garantiza la compacidad requerida en el espacio de las funciones continuas. ■

En lo que sigue, suponemos que $s < p$, bajo esta hipótesis probamos el siguiente resultado de bifurcación.

Teorema 2.4.12 *Supongamos que $1 < s < p < q$ y $\beta, \mu < (\gamma + 1)$. Entonces existe un continuo de soluciones Σ del problema $(P_{\gamma}^{\omega\beta})$ bifurcando desde $(\lambda, \|u\|_{\infty}) = (0, 0)$. Además:*

i) *Si $(\lambda, u) \in \Sigma$ y $\lambda > 0$, entonces $u \not\equiv 0$.*

ii) *Existe una constante $\rho_0 > 0$ tal que si $\rho \in (0, \rho_0]$ y $(\lambda, u) \in \Sigma$, con $\|u\|_{\infty} = \rho$, entonces $\lambda \geq \lambda(\rho) > 0$.*

Uno de los obstáculos es la no linealidad del operador $\Delta_{p,\gamma}$, que no permite utilizar las técnicas estándar de linealización. Incluso cuando $p = 2$ y el operador es lineal $\Delta_{2,\gamma}$, el término no lineal u^{s-1} tiene derivada infinito en cero. Otra dificultad es la presencia del potencial $|x|^{-p\gamma}$.

Podemos solventar la primera dificultad como en [15]. Para ello, consideramos la función truncamiento $h_{\delta}(t) = \delta^{s-p}|t|^{p-2}t$ si $t \leq \delta$ y $h_{\delta}(t) = t^{s-1}$ si $t > \delta$. Definimos los problemas aproximados $(P_{s,\lambda}^{\delta})$ como sigue:

$$(P_{s,\lambda}^{\delta}) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma}(u) = \lambda\omega_{\beta}(x)h_{\delta}(u) + |x|^{-q\mu}u^{q-1} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.49)$$

que no es más que $(P_{s,\lambda}^{\omega\beta})$ con $h_{\delta}(u)$ en lugar de u^{s-1} . Para solventar la segunda dificultad, procedemos como en el Teorema 2.4.11 y tenemos que existe un continuo \mathcal{C}_{δ} de soluciones del problema $(P_{s,\lambda}^{\delta})$ bifurcando desde $(\lambda_1^{\delta}, 0)$ con $\lambda_1^{\delta} = \delta^{p-s}\lambda_1(\omega_{\beta})$, siendo $\lambda_1(\omega_{\beta})$ el primer autovalor del problema

$$-\Delta_{p,\gamma}\varphi = \lambda\omega_{\beta}(x)\varphi^{p-1} \quad \text{en } \Omega, \quad \varphi \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega).$$

Para finalizar, usamos el Lema 1.5.9. Sea $R > 0$ y denotemos T_R la bola de radio R en $E = \mathbb{R} \times X$, donde $X = E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Denotemos Σ^{δ} la componente conexa de $\mathcal{C}_{\delta} \cap T_R$ que contiene $(\lambda_1^{\delta}, 0)$. Para una sucesión $\delta_n \rightarrow 0$ y $\Sigma^n = \Sigma^{\delta_n}$ tenemos que $\cup \Sigma^n$ es precompacto por el siguiente lema.

Lema 2.4.13 *Supongamos las hipótesis del Teorema 2.4.12 y sea $\{(\lambda_k, u_k)\}$ una sucesión acotada de soluciones del Problema $(P_{s,\lambda}^{\delta})$, entonces existe una subsucesión que converge a (λ_0, u_0) , y u_0 es solución del Problema $(P_{s,\lambda}^{\omega\beta})$ con $\lambda = \lambda_0$.*

Demostración. Para una subsucesión si es necesario, tenemos que $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$, $u_k \rightharpoonup u_0$ débilmente en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ y $u_k \rightarrow u_0$ fuertemente en $L_\beta^s(\Omega)$ por el Lema 2.2.10, por consiguiente, $u_k \rightarrow u_0$ en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ puesto que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u_k|^{p-2} \langle \nabla u_k, \nabla(u_k - u_0) \rangle dx \\ &= \lambda_k \int_{\Omega} u_k^{s-1} (u_k - u_0) \omega_\beta(x) dx + \int_{\Omega} |x|^{-q\mu} u_k^{q-1} (u_k - u_0) dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

y por las desigualdades (2.37) concluimos que

$$\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla(u_k - u_0)|^p dx \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

FIN DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.4.12:

Como tenemos $\lambda_1^{\delta_n} \rightarrow 0$ para $\delta_n \rightarrow 0$, obtenemos que $(0, 0) \in \liminf \Sigma^n$, entonces podemos aplicar el Lema 1.5.9 a Σ^n . La conclusión es que

$$\mathcal{C}_R = \limsup \Sigma^n = \limsup (\mathcal{C}_{\delta_n} \cap T_R) \neq \emptyset \text{ es conexo y cerrado.}$$

Además, es claro que \mathcal{C}_R toca T_R para todo $R > 0$. Denotemos $\mathcal{C} = \bigcup_{R>0} \mathcal{C}_R$ entonces tenemos probado que \mathcal{C} es un continuo en E con $(0, 0) \in \mathcal{C}$.

Para probar *i)* y *ii)* argumentamos como sigue:

i) En primer lugar, probamos que existe $c(\lambda)$ pequeño tal que si $(\lambda, u) \in \Sigma$ entonces $\|u\|_\infty \geq c(\lambda)$, esto es suficiente para probar que se verifica *i)*. Como $\lambda_1^\delta \rightarrow 0$ para $\delta \rightarrow 0$, dado $\lambda > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\lambda h(\delta_0) \delta_0^{1-p} > \lambda_1(\omega_\beta)$ si $\delta < \delta_0$. Sea $\varepsilon > 0$ pequeño, podemos encontrar una constante $c(\lambda) > 0$ tal que $\lambda h_\delta(t) + t^{q-1} > (\lambda_1(\omega_\beta) + \varepsilon) t^{p-1}$ para todo $t \in (0, c(\lambda)]$. Así, si $\|u\|_\infty < c(\lambda)$, tenemos que

$$-\Delta_{p,\gamma} u \geq (\lambda_1(\omega_\beta) + \varepsilon) \omega_\beta |u|^{p-2} u.$$

Además, podemos encontrar $\alpha > 0$ pequeño tal que para φ_1 , una autofunción positiva asociada al primer autovalor $\lambda_1(\omega_\beta)$, tenemos $\alpha \varphi_1 \leq u$. Como consecuencia, por el método de iteración, encontramos una solución del problema de autovalores

$$-\Delta_{p,\gamma} u = (\lambda_1 + \delta) \omega_\beta(x) |u|^{p-2} u \text{ en } \Omega, \quad B(u) = 0 \text{ sobre } \Sigma_1.$$

Este hecho es una contradicción con el aislamiento del primer autovalor $\lambda_1(\omega_\beta)$ (ver Lema 2.3.12).

Para probar *ii*), argumentamos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que existe $(\lambda_n, u_n) \in \Sigma^n$ con $\lambda_n \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow u$ y $\|u_n\|_\infty = \rho \leq \rho_0$. Entonces tenemos que $u_n \rightarrow u$ en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, así $u \neq 0$ es una solución débil de la ecuación

$$-\Delta_{p,\gamma} u = |u|^{q-1} u \text{ with } \|u\|_\infty \leq \rho_0,$$

pero esto es una contradicción, porque si definimos $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}$, y u_n es una sucesión de soluciones de la ecuación $-\Delta_{p,\gamma} u = |u|^{q-1} u$ en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ con $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$, existe una subsucesión débilmente convergente en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, de forma que $-\Delta_{p,\gamma} v_n = v_n^{q-1} \|u_n\|_\infty^{q-p}$ y por lo tanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^{-p\gamma} dx = \int_{\Omega} v_n^{q-1} \|u_n\|_\infty^{q-p} dx \rightarrow 0,$$

que es una contradicción. ■

Observación 2.4.14 *El Teorema 2.4.12 puede extenderse para obtener bifurcación, en sentido de energía, desde $(0,0)$ cuando $\beta = (\gamma + 1)$. Una prueba consiste en seguir los argumentos de [4] con los cambios adecuados a nuestro contexto, puesto que el exponente $s < p$ da margen para usar el Lema 2.2.10 que garantiza la compacidad requerida.*

Capítulo 3

Problemas Críticos

3.1 Introducción

En este capítulo consideramos el problema modelo:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \frac{u^q}{|x|^p} + u^r & \text{en } \Omega, \\ u &> 0 & \text{en } \Omega, \\ B_\alpha(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) es un dominio suave y acotado con $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $1 < q \leq p-1$, $r = p^* - 1$, $\left(p^* = \frac{pN}{N-p}\right)$ y $0 \leq \lambda \leq \Lambda$ que será el valor extremal a partir del cual no existe solución. Como en anteriores capítulos, ν denota la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ y sobre las condiciones de contorno suponemos:

$$B_\alpha(u) = u\chi_{\Sigma_1(\alpha)} + |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \chi_{\Sigma_2(\alpha)} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) = \alpha \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)),$$

además,

$$\begin{cases} \Sigma_i(\alpha) \subset \partial\Omega, i = 1, 2, \text{ son subvariedades suaves de dimensión } N-1, \\ \Sigma_1(\alpha) \cap \Sigma_2(\alpha) = \emptyset, \bar{\Sigma}_1(\alpha) \cup \bar{\Sigma}_2(\alpha) = \partial\Omega \text{ y la interfase } \Gamma = \bar{\Sigma}_1(\alpha) \cap \bar{\Sigma}_2(\alpha) \\ \text{es una subvariedad suave de dimensión } N-2. \end{cases} \quad (3.2)$$

De ahora en adelante, recordaremos cómo movemos las condiciones de contorno:

(H1) $\Sigma_1(\alpha_1) \subset \Sigma_1(\alpha_2)$ para $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Sigma_1(\alpha) = \mathcal{C}_1 \subset \partial\Omega$ con $\text{cap}_{p,\mu}(\mathcal{C}_1) = 0$.

Donde denotamos por $\text{cap}_{p,\mu}(E)$ la (p, μ) -capacidad del conjunto E , que no es más que la p -capacidad de E respecto a la medida $d\mu = |x|^{-p\gamma}dx$ (véanse [84] ó [96] por ejemplo).

La estructura del capítulo es la siguiente:

La Sección 3.2 la dividimos en dos subsecciones. En la primera (Subsección 3.2.1) comenzamos recordando algunos resultados relativos a la constante de Sobolev con condiciones mixtas, establecidos principalmente por Egnell, Lions, Pacella y Tricarico en los artículos [63], [94] y [104]. Posteriormente, probamos una condición suficiente para obtener la alcanzabilidad de la constante de Sobolev. Esta condición está relacionada con la convergencia del primer autovalor cuando movemos las condiciones de contorno (véase el Teorema 2.3.13). En la Subsección 3.2.2 mejoramos un resultado establecido por Wang-Zhu en [126], donde los autores dan una condición suficiente para alcanzar la constante de Hardy $\Lambda_{N,2,0}(\Omega, \Sigma_1)$ definida en (3.7). Precisamente, probamos condiciones suficientes en dos direcciones: por un lado, extendemos el resultado de Wang-Zhu a la constante $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ definida en (2.11), por otro lado, damos una condición suficiente similar a la establecida en la Subsección 3.2.1 para la constante de Sobolev. Este hecho revela una profunda diferencia entre el caso Dirichlet y el caso con condiciones mixtas.

En la Sección 3.4 estudiamos resultados de existencia y no existencia del problema doblemente crítico:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p^*-1}}{|x|^p} + u^{p^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Finalmente, en la Sección 3.5 señalamos como de manera inmediata se extienden algunos de los resultados, demostrados en las secciones previas, al caso con el operador $\Delta_{p,\gamma}$ definido en el Capítulo 2.

Publicación. Los resultados de este capítulo son parte del contenido del artículo [51] que se someterá a publicación en breve.

3.2 Resultados sobre las constantes de Hardy y Sobolev

Esta sección la dividimos en dos subsecciones: en la primera se estudia la constante de Sobolev y en la segunda, la de Hardy. En cada una de ellas, comenzamos estableciendo algunos resultados previos; después, extendemos y mejoramos algunos de esos resultados, que están relacionados con la alcanzabilidad de dichas constantes, hecho que pone de manifiesto, una vez más, la gran diferencia entre los problemas mixtos y el de Dirichlet.

3.2.1 Sobre la constante de Sobolev

En el artículo [94], Lions, Pacella y Tricarico, estudian cuestiones relativas a la mejor constante de Sobolev en espacios funcionales como $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$, y dan condiciones suficientes sobre la geometría del dominio Ω y la parte de frontera del mismo en la que tomamos dato de tipo Neumann, Σ_2 , de modo que la mejor constante de Sobolev definida por

$$S_p^p(\Omega, \Sigma_1) = \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{p/p^*}} \quad (3.4)$$

se alcanza en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$.

Comenzamos recordando algunos resultados probados en [94] que son el punto de partida para nuestro análisis. Es bien conocido que la constante de Sobolev, S_p , definida por

$$S_p^p = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega); u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}}},$$

no depende del dominio Ω . Esto no ocurre cuando tomamos traza nula sólo sobre Σ_1 , en este caso, $S_p(\Omega, \Sigma_1)$ depende del dominio Ω y de las condiciones de contorno. En [94] se establece una condición de forma que $S_p(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza. Precisamente, tomamos $(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{N-1})$ las coordenadas polares en \mathbb{R}^N , $\theta_i \in [0, \pi]$, $1 \leq i \leq N-2$, $\theta_{N-1} \in [0, 2\pi]$, y denotamos el sector de radio R y amplitud $\alpha \in [0, 2\pi]$ por

$$\Sigma(\alpha, R) = \{x \in \mathbb{R}^N | 0 \leq |x| < R, \theta_i \in (0, \pi) \text{ and } \theta_{N-1} \in (0, \alpha)\}.$$

Definimos la constante isoperimétrica del dominio Ω relativa a Σ_2 por

$$Q(\Sigma_2, \Omega) = \sup_E \frac{|E|^{1-\frac{1}{N}}}{P_{\Omega}(E)},$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos $E \subset \Omega$ tales que si $A \subset \partial E \cap \Sigma_1$ entonces $\mathcal{H}_{N-1}(E) = 0$, y donde $P_\Omega(E)$ es el perímetro de De Giorgi de E relativo a Ω , que está definido por

$$P_\Omega(E) = \sup_{\psi} \left\{ \left| \int_E \operatorname{div}(\psi) dx \right| \mid \psi \in (C_0^\infty(\Omega))^N, |\psi| \leq 1 \right\}.$$

Las propiedades de $Q(\Sigma_2, \Omega)$ pueden encontrarse en [104]. Algunas de ellas son las siguientes:

- $Q(\Sigma_2, \Omega) \geq \left(N \omega_N^{1/N} \right)^{-1}$, la constante isoperimétrica absoluta (véase [120]).
- Una desigualdad obvia es $|E|^{1-\frac{1}{N}} \leq Q(\Sigma_2, \Omega) P_\Omega(E)$ para cada conjunto E , verificando la condición establecida antes.
- Si $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_2) > 0$, $Q(\Sigma_2, \Omega) \geq (N(\omega_N/2)^{1/N})^{-1}$, de esto se deduce que si en Ω tomamos $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_2) > 0$, entonces existe $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $Q(\Sigma_2, \Omega) = (N\alpha_N^{1/N})^{-1}$, donde denotamos por $\alpha_N = |\Sigma(\alpha, 1)|$, es decir, la medida del sector unidad de amplitud α .
- En el caso regular, el perímetro relativo está dado por $P_\Omega(E) = \mathcal{H}_{N-1}(\partial E \setminus \Sigma_2)$.
- Cuando $\Omega = \Sigma(\alpha, R)$, con $0 < \alpha \leq \pi$, $\tilde{\Sigma}_1 = \{x \in \partial \Sigma(\alpha, R) \mid |x| = R\}$ y $\tilde{\Sigma}_2 = \partial \Sigma(\alpha, R) \setminus \tilde{\Sigma}_1$ la constante isoperimétrica se calcula exactamente, $Q(\tilde{\Sigma}_2, \Sigma(\alpha, R)) = \left(N \alpha_N^{1/N} \right)^{-1}$.

Los resultados conocidos sobre la constante de Sobolev en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ (véanse [94] y [63]), que tomamos como punto de partida, los podemos englobar en el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 *Sea Ω tal que $Q(\Sigma_2, \Omega) = \left(N \alpha_N^{1/N} \right)^{-1}$ con $\alpha_N \in (0, \frac{\omega_N}{2}]$ entonces*

$$S_p(\Omega) \leq S_p(\Sigma(\pi, R)) \equiv S_p\left(\frac{\omega_N}{2}\right).$$

Donde $S_p(\alpha_N) = \min S_p(\Omega) = \left(\frac{\alpha_N}{\omega_N} \right)^{\frac{1}{N}} S_p$, y el mínimo se toma sobre todos los conjuntos

Ω con la misma constante isoperimétrica $Q(\Sigma_2, \Omega) = \left(N \alpha_N^{1/N} \right)^{-1}$.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un dominio acotado:

- Si Σ_2 es suave y $S_p(\Omega, \Sigma_1) < S_p(\frac{\omega_N}{2})$, entonces $S_p(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza.

- Si $Q(\Sigma_2, \Omega) = \left(N\alpha_N^{1/N}\right)^{-1}$ y $S_p(\Omega, \Sigma_1) = S_p(\alpha_N)$, entonces $S_p(\Omega, \Sigma_1)$ no se alcanza.

El resultado que probamos en la Proposición 3.2.2, da una condición suficiente bajo la cual, se verifica que $S_p(\Omega, \Sigma_1) < S_p\left(\frac{\omega_N}{2}\right)$, y como consecuencia del Teorema 3.2.1, $S_p(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza. Para demostrarlo, utilizamos la convergencia del primer autovalor establecida en el Teorema 2.3.13 para un caso más general. Precisamente, demostramos que $S_p^p(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza si movemos las condiciones de frontera de manera regular.

Proposición 3.2.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regular. Dada una familia $\{\Sigma_1(\alpha) : 0 < \alpha < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)\}$ verificando las hipótesis (3.2) y (H1). Entonces existe una constante positiva α_0 tal que $S_p(\Omega, \Sigma_1(\alpha))$ se alcanza para todo $\alpha < \alpha_0$.

Demostración. Por definición de $S_p(\Omega, \Sigma_1)$ y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$S_p^p(\Omega, \Sigma_1) = \inf_{\substack{u \in E_{\Sigma_1(\alpha)}^p(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} \leq |\Omega|^{\frac{p}{N}} \inf_{\substack{u \in E_{\Sigma_1(\alpha)}^p(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx} = |\Omega|^{\frac{p}{N}} \lambda_1(\alpha).$$

En el Teorema 2.3.13, demostramos, entre otras cosas, que $\lambda_1(\alpha) \rightarrow 0$ para $\alpha \rightarrow 0$, por lo tanto deducimos que existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$|\Omega|^{\frac{p}{N}} \lambda_1(\alpha_0) \leq \frac{S_p^p}{2^{p/N}}$$

de manera que para todo $0 \leq \alpha < \alpha_0$ tenemos que $|\Omega|^{\frac{p}{N}} \lambda_1(\alpha) < \frac{S_p^p}{2^{p/N}}$. Como consecuencia inmediata, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.1, que nos permite concluir el resultado. ■

Observaciones 3.2.3

1. El Teorema 3.2.1 da un resultado "positivo" en el sentido que el problema crítico asociado,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{p^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \end{cases} \quad (3.5)$$

tiene solución positiva cuando se alcanza la constante de Sobolev $S_p(\Omega, \Sigma_1(\alpha))$.

2. Supongamos que $\langle x, n \rangle = 0$ en c.t.p. de Σ_2 y $\langle x, n \rangle > 0$ en c.t.p. de Σ_1 , entonces, el problema (3.5) no tiene solución positiva. En efecto, si u fuese solución positiva del Problema(3.5) tendríamos la identidad de tipo Pohozaev siguiente:

$$\frac{1}{p^*} \int_{\Sigma_2} \langle x, n \rangle u^{p^*} d\sigma = \frac{1}{p} \int_{\Sigma_2} \langle x, n \rangle |\nabla u|^p d\sigma - \frac{p-1}{p} \int_{\Sigma_1} \langle x, n \rangle |\nabla u|^p d\sigma. \quad (3.6)$$

Esto es una contradicción, puesto que el lado derecho en (3.6) es negativo, mientras que el izquierdo es nulo.

Un ejemplo de dominio, que satisface las condiciones geométricas impuestas para la prueba de la no existencia, es el siguiente cono:

$$\Omega = \left\{ x_N > \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2} \right\} \cap \left\{ x_1^2 + \cdots + x_N^2 < 1 \right\},$$

$$\Sigma_1 = \partial\Omega \cap \{x_1^2 + \cdots + x_N^2 = 1\},$$

$$\Sigma_2 = \partial\Omega \cap \left\{ x_N = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2} \right\}.$$

Otro ejemplo son los sectores $\Sigma(\alpha, R)$ definidos anteriormente.

Debido a la Proposición 3.2.2 y a la última observación, ponemos de manifiesto un hecho relevante y es que la constante de Sobolev $S_p(\Omega, \Sigma_1)$ puede alcanzarse o no, mientras que en el caso Dirichlet, S_p no depende de Ω y nunca se alcanza en dominios acotados.

3.2.2 Sobre la constante de Hardy

En esta subsección probamos resultados relacionados con la mejor constante de Hardy, $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$, definida por

$$\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) = \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx}. \quad (3.7)$$

En el caso del problema de Neumann, es decir, cuando $\Sigma_1 = \emptyset$, la constante corresponde a $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) = 0$, ya que el ínfimo se alcanza en las constantes. Si consideramos condiciones mixtas de tipo Dirichlet-Neumann, probamos en primer lugar el siguiente resultado.

Lema 3.2.4 *La constante de Hardy $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$ satisface*

$$0 < \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) \leq \Lambda_{N,p} \equiv \left(\frac{N-p}{p} \right)^p.$$

Demostración. La cota superior es una consecuencia directa de la inclusión de los espacios funcionales en los que tomamos los ínfimos, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$. Para probar la positividad de la constante, $0 < \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$, usamos la desigualdad de Picone (2.7) como sigue:

Consideremos el cociente

$$Q(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx}$$

y tomemos el ínfimo de Q sobre $E_{\Sigma_1}^p(\Omega) \setminus \{0\}$. Definamos $\omega(x) = |x|^\alpha$ para alguna constante $\alpha < 0$ con $|\alpha|$ suficientemente pequeño tal que $|\alpha|(p-1) < N-p$. Dada una sucesión minimizante $\{v_n\}$ para $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$, por la desigualdad de Picone (2.7) y el Teorema de la Traza 2.3.15 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p dx &\geq \int_{\Omega} \left\langle \nabla \left(\frac{v_n^p}{\omega^{p-1}} \right), |\nabla \omega|^{p-2} \nabla \omega \right\rangle dx \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta_{p,\gamma} \omega) \frac{v_n^p |x|^{-p}}{\omega^{p-1} |x|^{-p}} dx - \int_{\Sigma_2} \frac{v_n^p}{\omega^{p-1}} \left| \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right| d\sigma(x) \\ &\geq c(c_0, \alpha) \int_{\Omega} \frac{v_n^p}{|x|^p} dx - c(\Sigma_2, c_0, \alpha) \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p dx. \end{aligned}$$

Entonces concluimos que $Q(v_n) \geq C > 0$ donde C solo depende de Σ_2 , c_0 y α . ■

Teorema 3.2.5 *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y acotado con $0 \in \Omega$. Si*

$$\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,p}$$

entonces $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza.

Observación 3.2.6 *En un artículo reciente de Wang-Zhu, [126], se prueba el Teorema 3.2.5 en el caso $p = 2$. Su demostración utiliza fuertemente que el espacio $E_{\Sigma_1}^2(\Omega)$ es de Hilbert. Por tanto, necesitamos utilizar diferentes herramientas para extender este resultado a todo $p > 1$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.2.5:

Supongamos que $\{u_n\} \subset E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ es una sucesión minimizante para $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$. Entonces la sucesión es acotada y por el Teorema 4.4.1 (con $\gamma = 0$), existe una subsucesión (que escribimos igual) verificando $u_n \rightharpoonup u_0$ en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ y $|\nabla u_n|^p, \frac{|u_n|^p}{|x|^p}$ convergen en el sentido de las medidas a $\mu \geq |\nabla u_0|^p + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$, $\eta = \frac{|u_0|^p}{|x|^p} + \eta_0 \delta_{x_0}$, respectivamente, donde $x_0 = 0$, J es un conjunto a lo más numerable, $\mu_j, \eta_0 > 0$, $\mu_0 \geq \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) \eta_0$ y $x_j \in \bar{\Omega}$. Además, dado $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon}(0) \subset \Omega$, tenemos que $\frac{|u_n|}{|x|}$ converge fuerte a $\frac{|u_0|}{|x|}$ en $L^p(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))$. Por tanto, el soporte de las posibles deltas de Dirac no puede estar en $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$. Como ε podemos tomarlo arbitrariamente pequeño, la única posibilidad de concentración es en el origen, es decir, J consta de un solo índice, $J = \{0\}$, y $x_0 = 0$.

Hay dos posibilidades para la función límite u_0 :

1. Si $u_0 \not\equiv 0$, entonces tenemos que

$$\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) = \frac{\int_{\Omega} d\mu}{\int_{\Omega} d\eta} \geq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^p dx + \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) \eta_0}{\int_{\Omega} \frac{|u_0|^p}{|x|^p} dx + \eta_0} \implies \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) \geq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^p dx}{\int_{\Omega} \frac{|u_0|^p}{|x|^p} dx},$$

por lo tanto, $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza.

2. Si $u_0 \equiv 0$, consideramos una función de corte suave, $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ si $|x| < \varepsilon/2$, $\varphi_\varepsilon = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$. Definimos una nueva sucesión $v_n(x) = \varphi_\varepsilon(x) u_n(x)$, la cual es también una sucesión minimizante para $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$, puesto que el límite es el mismo, además $v_n \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces obtenemos que

$$Q(v_n) \geq \Lambda_{N,p} \quad \text{y} \quad Q(v_n) \rightarrow \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Esto es una contradicción con la hipótesis $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,p}$, de manera que no hay concentración para la sucesión $\{u_n\}$. Además por el Lema de Brezis-Lieb (véase [35]), tenemos que $\frac{u_n}{|x|} \rightarrow \frac{u_0}{|x|}$ en $L^p(\Omega)$. Es más, teniendo en cuenta la ecuación de Euler asociada y la continuidad del inverso del operador p -Laplaciano, concluimos la existencia de un minimizante, $u_0 \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$. Concretamente, la sucesión u_n es precompacta, es decir, existe una subsucesión que converge fuerte en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ a una función $u_0 \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ tal que $Q(u_0) = \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$.

■

El resultado siguiente continúa la línea de pensamiento de la Proposición 3.2.2 en cuanto a la alcanzabilidad, en este caso, de la constante de Hardy.

Proposición 3.2.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio suave y acotado. Dada una familia $\{\Sigma_1(\alpha) : 0 < \alpha < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)\}$ verificando las hipótesis (3.2) y (H1). Entonces existe una constante positiva α_0 tal que $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1(\alpha))$ se alcanza para todo $\alpha < \alpha_0$.*

Demostración. Por definición de $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$ tenemos

$$\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) \equiv \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx} \leq C \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx} = C \lambda_1(\alpha),$$

donde $C \equiv C(\Omega, p) > 0$. De nuevo por el Teorema 2.3.13, $\lambda_1(\alpha) \rightarrow 0$ para $\alpha \rightarrow 0$. Entonces existe $\alpha_0 > 0$ tal que $C \lambda_1(\alpha_0) < \Lambda_{N,p}$, de manera que para todo $0 \leq \alpha < \alpha_0$ tenemos $C \lambda_1(\alpha) < \Lambda_{N,p}$. Como consecuencia inmediata, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.5 que nos permite concluir la demostración. ■

Observaciones 3.2.8

1. En el Lema 1.4.3 hemos probado en las hipótesis: $\Sigma_1(\alpha)$ es conexo, $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) = \alpha$, $\Sigma_1(\alpha_1) \subset \Sigma_1(\alpha_2)$ para $\alpha_1 < \alpha_2$, el diámetro $\text{diam}(\Sigma_1(\alpha)) \rightarrow 0$ para $\alpha \rightarrow 0$, $p = 2$ y $N \geq 4$, que el primer autovalor tiene el comportamiento asintótico $\lambda_1(\alpha) \leq C \alpha^{\frac{N-3}{N-1}}$ para α próximo a cero. Es más, la prueba de ese resultado es constructiva, es decir, damos una familia precisa $\{\Sigma_1(\alpha)\}_{\alpha}$ para la cual el resultado asintótico es exacto. Además, la constante C es positiva y depende sólo de la dimensión N , el dominio Ω , y el gradiente de una rectificación de la frontera $\nabla \varphi$ en un entorno del punto $x_0 \in \Omega$, de manera que $\Sigma_1(\alpha)$ se contrae a x_0 en diámetro cuando $\alpha \rightarrow 0$. Como consecuencia, podemos dar un ejemplo de funciones definidas en una bola, por ejemplo, que satisfacen la siguiente estimación:

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx} < C \omega_N^{2/N} \alpha^{\frac{N-3}{N-1}},$$

de donde deducimos que alcanzamos la correspondiente constante de Hardy para α suficientemente pequeño. Dicha construcción puede extenderse al caso $p \neq 2$.

2. El Teorema 3.2.5 y la Proposición 3.2.7 dan condiciones suficientes para que la constante de Hardy $\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcance. Esto implica la existencia de solución positiva para el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1) \frac{u^{p-1}}{|x|^p} & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Al igual que ocurría con la constante de Sobolev, tenemos una identidad de tipo Pohozaev para el Problema (3.9). En efecto, si $u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ es una solución positiva del Problema (3.9) obtenemos la siguiente identidad:

$$\frac{\Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)}{p} \int_{\Sigma_2} \langle x, n \rangle \frac{u^p}{|x|^p} d\sigma = \frac{1}{p} \int_{\Sigma_2} \langle x, n \rangle |\nabla u|^p d\sigma - \frac{p-1}{p} \int_{\Sigma_1} \langle x, n \rangle |\nabla u|^p d\sigma \quad (3.10)$$

esto nos da una contradicción cuando suponemos que $\langle x, n \rangle > 0$ en c.t.p. de Σ_1 y $\langle x, n \rangle = 0$ en c.t.p. de Σ_2 . Un ejemplo de dominio que satisface dichas hipótesis es un “cono” como en las Observaciones 3.2.3 ó un sector $\Sigma(\alpha, R)$ como en la subsección anterior.

3.3 Problema cóncavo-convexo con potencial singular

En esta sección demostramos algunos resultados de existencia y multiplicidad para el problema siguiente:

$$(P_\lambda) \equiv \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \frac{u^q}{|x|^p} + u^r & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde B_α lo tomamos como en la introducción verificando (3.2), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y acotado con $0 \in \Omega$, $0 < \lambda$ y $0 < q < p-1 < r < p^*-1$. Probamos que existe $0 < \lambda^* < \infty$ tal que el Problema (P_λ) tiene al menos dos soluciones para todo $0 < \lambda < \lambda^*$.

El resultado principal de esta subsección es el siguiente.

Teorema 3.3.1 Sean $0 < q < p-1 < r < p^*-1$, $0 < \alpha < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$. Entonces, existen dos números reales $0 < \lambda^* \leq \Lambda < \infty$ tales que el Problema (P_λ) verifica:

1. No hay solución para todo $\lambda > \Lambda$.
2. Existen al menos dos soluciones positivas para todo $0 < \lambda < \lambda^*$.

La demostración del primer punto se obtiene de manera similar a la del Capítulo 1 (probado con $p = 2$), el segundo apartado es consecuencia de los tres lemas siguientes.

Buscamos soluciones de (P_λ) como puntos críticos del funcional asociado de energía:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega \frac{u_+^{q+1}}{|x|^p} dx - \frac{1}{r+1} \int_\Omega u_+^{r+1} dx.$$

Lema 3.3.2 *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que el funcional J_λ tiene un mínimo local para cada $0 < \lambda < \lambda_0$.*

La demostración es un cálculo similar al visto en el Capítulo 1, módulo la condición de Palais Smale, que en dicho capítulo era obvia debido al carácter subcrítico del problema allí estudiado. Como veremos en el siguiente resultado, tampoco ahora hay muchas dificultades a pesar de la presencia del potencial crítico de Hardy.

Lema 3.3.3 *Sea $\{u_n\} \subset E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ una sucesión de Palais Smale, es decir, una sucesión verificando que $J_\lambda(u_n) \rightarrow c$ y $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$. Entonces existe una subsucesión $u_n \rightarrow u_0$ fuertemente convergente en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$, con $J'_\lambda(u_0) = 0$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $J(u_n) \rightarrow c$ y $J'(u_n) \rightarrow 0$, se comprueba que $\{u_n\}$ es una sucesión acotada en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$. Por tanto, existe una subsucesión débilmente convergente, para la cual podemos suponer que:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \quad \text{débilmente en } E_{\Sigma_1}^p(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u_0 \quad \text{fuertemente en } L^{r+1}(\Omega), \\ \frac{u_n^{q+1}}{|x|^p} &\rightarrow \frac{u_0^{q+1}}{|x|^p} \quad \text{fuertemente en } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\langle J'_\lambda(u_0), w \rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \langle \nabla u_n, \nabla w \rangle dx + o(1) = \langle J'_\lambda(u_n) + o(1), w \rangle,$$

por tanto, $\langle J'_\lambda(u_0), w \rangle = 0$, es decir, u_0 es solución de $(P_{\alpha, \lambda})$. Por otro lado,

$$o(1) = \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u_0), u_n - u_0 \rangle = \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0, \nabla u_n - \nabla u_0) dx + o(1),$$

donde utilizando las desigualdades vectoriales (2.37) establecidas en el Lema 2.3.14, se concluye de la manera habitual que

$$o(1) = c_p \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u_0)|^p dx,$$

de donde tenemos directamente la convergencia fuerte de la subsucesión $\{u_n\}$ en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$. ■

Lema 3.3.4 *Existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \lambda^*$, el Problema (P_λ) tiene una segunda solución positiva.*

Demostración. Como anteriormente, por las desigualdades de Hölder, Hardy y Sobolev,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|_{E_{\Sigma_1}^p(\Omega)}^p - \frac{\lambda c_0}{q+1} \|u\|_{E_{\Sigma_1}^p(\Omega)}^{q+1} - \frac{c_1}{r+1} \|u\|_{E_{\Sigma_1}^p(\Omega)}^{r+1},$$

entonces podemos escoger r_0, λ^* tales que $\forall 0 < \lambda < \lambda^*$ se verifica:

- (i) $J_\lambda(u)$ está acotado inferiormente en $B_{r_0} = \{u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega) \mid \|u\|_{E_{\Sigma_1}^p(\Omega)} < r_0\}$.
- (ii) Sea $-K = \inf\{J_\lambda(u) \mid u \in B_{r_0}\}$, entonces $K > 0$ y $0 > J_\lambda(u) \geq a > -K$ para $\|u\|_{E_{\Sigma_1}^p(\Omega)} = r_0$.

Además, dada $v \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$, $v \neq 0$, tenemos que $J_\lambda(tv) \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que existe v_1 tal que $J_\lambda(v_1) < 0$ para algún $v_1 \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ con $\|v_1\|_{E_{\Sigma_1}^p(\Omega)} > r_0$.

Definamos

$$G = \{\gamma \in C([0, 1]; E_{\Sigma_1}^p(\Omega)) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v_1\}$$

y el correspondiente valor minimax

$$c_0 = \inf_{\gamma \in G} \max_{0 \leq t \leq 1} J_\lambda(\gamma(t)).$$

Tenemos por tanto dos casos:

1. $c_0 > 0$, entonces por el Teorema del Paso de la Montaña de Ambrosetti-Rabinowitz en [17], encontramos la segunda solución.
2. $c_0 = 0$, en este caso concluimos por la versión del Teorema del Paso de la Montaña establecida por Ghoussoub-Preiss en [73].

■

Observación 3.3.5 Hay una gran diferencia en el hecho que Ω sea un dominio acotado ó sea \mathbb{R}^N . En [3] se demuestra que el problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \frac{u^q}{|x|^p} + u^{p^*-1} & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \quad u \in \mathcal{D}_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $0 < q < p - 1$, tiene $u \equiv 0$ como única solución.

En el caso de Ω dominio acotado con $0 \in \Omega$ y condiciones mixtas, se puede demostrar existencia e incluso multiplicidad de soluciones positivas en función de la dimensión, o argumentando para una familia de variedades $\{\Sigma_1(\alpha)\}$ como en las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.7 y en el Teorema 3.4.2 (como veremos en la siguiente sección).

3.4 Un problema doblemente crítico

En esta sección estudiamos la existencia de soluciones para el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^{p^*-1} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B_\alpha(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

que llamamos “doblemente crítico” porque tenemos dos términos críticos en el segundo miembro de la ecuación, a saber, el término de Sobolev u^{p^*-1} y el término de Hardy $\frac{u^{p-1}}{|x|^p}$.

Observación 3.4.1 En este problema también hay una gran diferencia entre el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ ó Ω un dominio acotado con condiciones Dirichlet:

1. Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, existe solución positiva para el problema:

$$-\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^{p^*-1}, \quad u \geq 0, \quad \mathcal{D}_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

2. Si Ω es un dominio acotado con $0 \in \Omega$, no existe solución para el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^{p^*-1}, & u \geq 0, \quad \text{en } \Omega, \\ u \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Véase [3] para más detalles.

En esta sección denotaremos:

$$Q_\lambda(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega \frac{u^p}{|x|^p} dx, \quad I_\lambda = \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega), \|u\|_{p^*} = 1} Q_\lambda(u).$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente,

Teorema 3.4.2 *Supongamos Ω , α en las hipótesis generales. Entonces:*

- Si $N > p^2$, para todo $\lambda \in (0, \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1))$, el Problema (3.11) tiene solución.
- Independientemente de la dimensión, en particular si $N \leq p^2$, dada una familia $\{\Sigma_1(\alpha) : 0 < \alpha < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)\}$ verificando las hipótesis (3.2) y (H1), existe una constante positiva α_0 tal que para todo $\alpha = \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) < \alpha_0$ y todo $0 < \lambda < \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$, el Problema (3.11) tiene solución.

Demostración. Supongamos que $\{u_n\} \subset E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ es una sucesión minimizante para $I_\lambda(\Omega)$, entonces, o bien $\{u_n\}$ es relativamente compacta o bien existe una subsucesión satisfaciendo las condiciones del Teorema 4.4.1, es decir, existen tres medidas positivas μ , ν y η sobre $\overline{\Omega}$ tales que $|\nabla u_n|^p$, $|u_n|^{p^*}$ y $\frac{|u_n|^p}{|x|^p}$ convergen en el sentido de las medidas a μ , ν y η , respectivamente, y existen un conjunto numerable J , distintos puntos $\{x_j\}_{j \in J} \subset \overline{\Omega}$ con $x_0 = 0$ y números reales positivos μ_j , ν_j y η_0 verificando:

1. $\mu \geq |\nabla u_0|^p + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$,
2. $\nu = |u_0|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$,
3. $\mu_j \geq S_p^p(\Omega, \Sigma_1) \nu_j^{p/p^*}$, $\forall j \in J$,
4. $\eta = \frac{|u_0|^p}{|x|^p} + \eta_0 \delta_0$,
5. $\mu_0 \geq \eta_0 \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$,

Supongamos que la sucesión $\{u_n\}$ no es relativamente compacta. Como en [94], se puede probar que el soporte de las posibles deltas de Dirac sólo puede estar Σ_2 y/o en el origen, es decir, $x_j \in \Sigma_2$, $x_0 = 0$.

Dividimos la prueba en dos pasos, teniendo en cuenta la concentración en Σ_2 ó en el origen.

Paso 1. En este paso probamos que no hay concentración en Σ_2 .

Para ello, argumentamos de manera similar a Grossi en [79] donde estudia el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{\frac{N+2}{N-2}} & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) un dominio regular acotado.

En nuestro problema, usando los argumentos de la Subsección 3.2.1, se prueba fácilmente que el nivel crítico de I_λ para que no haya concentración en Σ_2 es $S_p^p \left(\frac{\omega_n}{2}\right) = 2^{-p/N} S_p^p$, es decir, por debajo de este nivel tenemos que no hay concentración en Σ_2 . Consideremos una función de corte $\varphi_\varepsilon \in C^\infty([0, +\infty))$ verificando: $\varphi_\varepsilon(t) \geq 0$, $\varphi_\varepsilon(t) = 1$, si $0 \leq t \leq \frac{\varepsilon^q}{4}$ y $\varphi_\varepsilon(t) = 0$, si $t \geq \frac{\varepsilon^q}{2}$, para C, q constantes positivas que elegiremos más adelante. Definimos, para $x_0 \in \Sigma_2$, los minimizantes de Sobolev centrados en x_0 y modificados como sigue:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(|x - x_0|)}{\left(\varepsilon + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}.$$

Por un cálculo explícito, en el caso $N > p^2$, tenemos las estimaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon\|_p^p &= \frac{k_1}{\varepsilon^{\frac{p}{N-p}}} + O(\varepsilon^{-\frac{N-p}{p-1}q}) \\ \|u_\varepsilon\|_{p^*}^p &= \frac{k_2}{\varepsilon^{\frac{p}{N-p}}} + O(\varepsilon^{-\frac{N-p}{p-1}q}) \\ \left\| \frac{u_\varepsilon}{|x|} \right\|_p^p &= \frac{k_3}{\varepsilon^{\frac{N-p^2}{p}}} + O(\varepsilon^{-\frac{N-p^2}{p-1}q}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $\frac{k_1}{k_2} = 2^{-p/N} S_p^p$. De las estimaciones anteriores tenemos que

$$I_\lambda \leq \frac{Q_\lambda(u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_{p^*}^p} = \frac{k_1 - \lambda k_3 \varepsilon^{p-1} + O\left(\varepsilon^{(N-p)(\frac{1}{p} - \frac{q}{p-1})}\right)}{k_2 + O\left(\varepsilon^{(N-p)(\frac{1}{p} - \frac{q}{p-1})}\right)} = \frac{k_1}{k_2} - \lambda \frac{k_3}{k_2} \varepsilon^{p-1} + O\left(\varepsilon^{(N-p)(\frac{1}{p} - \frac{q}{p-1})}\right),$$

entonces $I_\lambda < 2^{-p/N} S_p^p$ para ε suficientemente pequeño y $q < \frac{(p-1)(N-p^2)}{p(N-p)}$.

Si $N \leq p^2$, como en la Proposición 3.2.2 tenemos que, fijada una familia $\{\Sigma_1(\alpha) : 0 < \alpha < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)\}$ verificando las hipótesis (3.2) y (H1), existe una constante positiva α_0

tal que para todo $\alpha = \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1(\alpha)) < \alpha_0$, entonces $I_\lambda < 2^{-p/N} S_p^p$ para todo $0 < \lambda < \Lambda_{N,\Sigma_1}(\Omega, \Sigma_1)$. Con esto terminamos la demostración del primer paso.

Paso 2. En este paso probamos que no hay concentración en el origen, $x_0 = 0$.

Supongamos por contradicción, que $\{u_n\}$ es una sucesión minimizante para I_λ no relativamente compacta. Como $\{u_n\}$ es acotada en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$, existe una subsucesión que denotamos igual, verificando que $u_n \rightharpoonup u_0$ débilmente en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$. Supongamos que $u_0 \not\equiv 0$, por el Lema de Fatou, $\|u_0\|_{p^*} \leq \|u_n\|_{p^*} = 1$. Si $\|u_0\|_{p^*} < 1$, entonces $I_\lambda = Q_\lambda(u_0) = I_\lambda \|u_0\|_{p^*}^{p^*} < I_\lambda$, lo cual es una contradicción, por tanto, o bien $\|u_0\|_{p^*} = 1$ ó bien $u_0 \equiv 0$. Si $\|u_0\|_{p^*} = 1$, argumentando como habitualmente, por el Lema de Brezis-Lieb concluimos la convergencia fuerte de la subsucesión.

Por consiguiente, suponemos que $u_0 \equiv 0$. Por el Teorema 4.4.1 y el **Paso 1** tenemos que $|\nabla u_n|^p$, $|u_n|^{p^*}$ y $\frac{u_n^p}{|x|^p}$ converge en el sentido de las medidas a $\mu \geq \mu_0 \delta_{x_0}$, $\nu = \nu_0 \delta_{x_0}$ y $\eta = \eta_0 \delta_{x_0}$ respectivamente, donde $x_0 = 0$. Además, $\mu_0 \geq S_p^p(\Omega, \Sigma_1) \nu_0^{p/p^*}$, $\mu_0 \geq \eta_0 \Lambda_{N,p}(\Omega, \Sigma_1)$.

Teniendo en cuenta la inclusión de los espacios $W_0^{1,p}(\Omega) \subset E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ resulta de manera inmediata:

$$I_\lambda \leq \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_{p^*} = 1} Q_\lambda(u) = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{p^*} = 1} Q_\lambda(u) \equiv S_T,$$

donde S_T es la constante que extiende la de Terracini en el caso $p = 2$.

Tomemos $\varphi_\varepsilon \geq 0$ una función suave verificando $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ si $|x| < \varepsilon/2$, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$ y supongamos que $B_\varepsilon(0) \subset\subset \Omega$, entonces $v_n = u_n \varphi_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y además,

$$\frac{Q_\lambda(v_n)}{\|v_n\|_{p^*}} > S_T \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_\lambda(v_n)}{\|v_n\|_{p^*}} = I_\lambda,$$

por lo que $I_\lambda \geq S_T$, y como consecuencia tenemos la identidad $I_\lambda = S_T$. Ahora probamos que esto es una contradicción, y con esto terminamos. Observamos que $v_n \in W_0^{1,p}(B_\varepsilon(0)) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces siguiendo la prueba del Teorema 0.2 de S. Terracini en [122] para $p = 2$ y [3] para el caso general $1 < p < N$, tenemos que para cada n existe un $R_n > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R_n}(0)} |\nabla v_n|^p dx - \lambda \int_{B_{R_n}(0)} \frac{v_n^p}{|x|^p} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_n}(0)} |\nabla v_n|^p dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_n}(0)} \frac{v_n^p}{|x|^p} dx = \frac{1}{2} Q_\lambda(v_n). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Además, R_n es acotado puesto que el lado derecho de (3.13) necesariamente es positivo. Más aún, por invarianza del cociente $\frac{Q_\lambda(\cdot)}{\|\cdot\|_{p^*}^p}$ bajo un dilataciones del tipo

$$\omega_n(x) = R_n^{-\frac{N-p}{N}} v_n \left(\frac{x}{R_n} \right),$$

la sucesión $\{\omega_n\}$ aún forma una sucesión minimizante para S_T , y por el Teorema 3.3 en [3], $\omega_n \rightharpoonup \omega_0 \neq 0$, que es una solución para el Problema de Terracini, es decir, ω_0 es un minimizante para S_T . Esto nos da una contradicción porque $\omega_0 \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$ para algún $R > 0$.

■

3.5 Extensión de algunos resultados

A lo largo de esta sección, extendemos algunos resultados previos, que por simplicidad y por tenerlos en un marco apropiado, los hemos enunciado en las secciones anteriores de forma menos general, con $\gamma = 0$.

✦

Lema 3.5.1 *La constante de Hardy $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ verifica las siguientes desigualdades:*

$$0 < \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \leq \Lambda_{N,p,\gamma} \equiv \left(\frac{N - p(\gamma + 1)}{p} \right)^p.$$

Demostración. La cota superior la obtenemos directamente por la inclusión de los espacios $D_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega) \subset E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$. Para probar que $\lambda_{\gamma,N,p}(\Sigma_1) > 0$, usamos la identidad de Picone como sigue:

Consideremos el cociente

$$Q(u) = \frac{\| |x|^\gamma \nabla u \|_p^p}{\| |x|^{\gamma+1} u \|_p^p},$$

entonces $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ está definida como el ínfimo de Q en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \setminus \{0\}$, ver (4.46). Definimos $\omega(x) = |x|^\alpha$ para alguna constante $\alpha < 0$ con $|\alpha|$ suficientemente pequeño como para que $|\alpha|(p-1) < N - p(\gamma+1)$. Dada una sucesión minimizante $\{v_n\}$ para $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$,

por la Identidad de Picone (2.7) y el Teorema de la Traza 2.3.15, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p |x|^{-p\gamma} dx &\geq \int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} \langle \nabla \left(\frac{v_n^p}{\omega^{p-1}} \right), |\nabla \omega|^{p-2} \nabla \omega \rangle dx \\
 &= \int_{\Omega} (-\Delta_{p,\gamma} \omega) \frac{v_n^p |x|^{-p(\gamma+1)}}{\omega^{p-1} |x|^{-p(\gamma+1)}} dx - \int_{\Sigma_2} |x|^{-p\gamma} \frac{v_n^p}{\omega^{p-1}} \left| \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right| d\sigma(x) \\
 &\geq c(c_0, \alpha) \int_{\Omega} \frac{v_n^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} dx - c(\Sigma_2, c_0, \alpha) \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p |x|^{-p\gamma} dx,
 \end{aligned}$$

Entonces concluimos que $Q(v_n) \geq C > 0$ donde C sólo depende de Σ_2 , c_0 y α . ■

Teorema 3.5.2 *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y acotado con $0 \in \Omega$. Si*

$$\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,p,\gamma},$$

entonces $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza.

La demostración de este teorema se obtiene como la del Teorema 3.2.5, utilizando en este caso el resultado completo del Teorema 4.4.1.

Consideremos ahora el problema siguiente:

$$(P_{\gamma,\lambda}) \equiv \begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{u^q}{|x|^{p(\gamma+1)}} + \frac{u^r}{|x|^{(r+1)\gamma}} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Delta_{p,\gamma}$ está definido en el Capítulo 2 y las condiciones de contorno $B(\cdot)$ las tomamos como en (2.2) y (2.3), debido a la presencia del peso $|x|^{-p\gamma}$. Además, suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio regular y acotado con $0 \in \Omega$, $0 < \lambda$, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$ y $0 < q < p-1 < r < p^*-1$. Entonces, siguiendo las mismas ideas que en la demostración del Teorema 3.3.1, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 3.5.3 *Sean $0 < q < p-1 < r < p^*-1$, $0 < \alpha < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$. Entonces, existen dos números reales $0 < \lambda^* \leq \Lambda < \infty$ tales que el Problema $(P_{\gamma,\lambda})$ verifica:*

1. *No tiene solución para todo $\lambda > \Lambda$.*
2. *Existen al menos dos soluciones positivas para todo $0 < \lambda < \lambda^*$.*

Capítulo 4

Algunos resultados de regularidad, acotación y compacidad

4.1 Introducción

En este capítulo investigamos regularidad y estimaciones uniformes en L^∞ para ciertos problemas elípticos relacionados con algunas desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (ver el Teorema 2.2.3). Por otro lado, se establece la extensión de los resultados de P. L. Lions en [93] Partes I y II, que se utilizó en capítulos anteriores.

Precisamente, en la Sección 4.2 probamos que las soluciones del Problema (4.1) son Hölder Continuas con exponente $0 < \kappa < 1/2$, es decir, están en el espacio $C^\kappa(\bar{\Omega})$, donde

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} u = f, & \text{en } \Omega \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

y suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio suave con $0 \in \Omega$, $f \in L_\eta^r(\Omega)$ para algún $r > \frac{N}{p}$, $\eta = -p^*\gamma \frac{r-1}{r}$, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$ y las condiciones de contorno $B(\cdot)$ vienen definidas como en el Capítulo 2 por (2.2) y (2.3).

En la Sección 4.3 establecemos estimaciones L^∞ para las soluciones del Problema (4.39). Concretamente, extendemos el Método de Blow-Up de Gidas-Spruck con los pesos de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Este resultado extiende el Teorema 1.1.3.

Finalmente, en la Sección 4.4 demostramos una extensión de un teorema de P. L. Lions (ver [93]) de concentración compacidad para el espacio funcional $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ (definido en (2.6))

en el Capítulo 2).

Publicaciones. En este capítulo mostramos algunos resultados de los artículos [49] y [51].

4.2 Continuidad Hölder

La teoría de regularidad de mínimos de funcionales, o de soluciones de *energía finita* de ecuaciones elípticas en forma divergencia, ha sido uno de los capítulos más brillantes del desarrollo de las Matemáticas del Siglo XX. El trabajo pionero de De Giorgi en 1957, [56], fue casi simultáneo al de Nash en 1958, [103], mucho más difícil de leer por lo que ha tenido menos relieve. Un poco más tarde aparecen los artículos de Moser [100] y [101] con demostraciones diferentes a las de De Giorgi. Hablando de manera simplificada, De Giorgi mide conjuntos de nivel, en tanto que Moser utiliza convenientes funciones test *no lineales*. Extensiones importantes son debidas a Stampacchia (véase la lista de artículos en [117]), Ladyzhenskaya-Ural'tseva, [88], y Serrin, [113].

En esta sección, extendemos los resultados conocidos de regularidad para las soluciones de energía finita, cuando el operador en forma de divergencia es $\Delta_{p,\gamma}$, donde $p > 1$, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$. En relación a la regularidad de las soluciones en el interior surgen dificultades: el operador no es lineal y los coeficientes no son acotados. En cuanto a la regularidad en la frontera, extendemos los resultados de De Giorgi al operador $\Delta_{p,\gamma}$. De hecho, basta considerar el p -Laplaciano, dado que el peso $|x|^{-p\gamma}$ está acotado superior e inferiormente por dos constantes positivas en $\partial\Omega$ cuando $0 \in \Omega$.

Consideremos el problema (4.1) en las hipótesis de la introducción, el principal resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 4.2.1 *Sea $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ solución del problema (4.1). Entonces $u \in C^\kappa(\bar{\Omega})$ para algún $0 < \kappa < \frac{1}{2}$.*

La prueba de este teorema será inmediata una vez probemos los Teoremas 4.2.8 y 4.2.19, en los que hemos aislado las dificultades. En el primero probamos la continuidad Hölder en entornos del origen y en el segundo la probamos en entornos de la frontera. En el resto del interior del dominio, la continuidad Hölder de las soluciones de (4.1) es un resultado clásico, de hecho ahí son $C^{1,s}$ con $0 < s < 1$.

Comenzamos formulando dos lemas debidos a Stampacchia (véanse [117] ó [76]), los cuales utilizaremos en lo que sigue.

Lema 4.2.2 *Sea α una constante positiva y sea $\{x_k\}$ una sucesión verificando*

$$x_{k+1} \leq CB^k x_k^{(1+\alpha)}, \text{ con } C > 0, B > 1.$$

Entonces, si $x_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, se verifica

$$x_k \leq B^{-\frac{k}{\alpha}} x_0$$

y como consecuencia $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.

Lema 4.2.3 *Sea $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función creciente y supongamos que existe θ , $0 < \theta < 1$ tal que para todo $R > R_0$*

$$\phi(\theta R) \leq \theta^\eta \phi(R) + BR^\beta, \text{ con } 0 < \beta < \eta. \quad (4.2)$$

Entonces existe una constante positiva $C \equiv C(\theta, \eta, \beta)$ tal que para todo $\rho < R > R_0$ se verifica,

$$\phi(\rho) \leq C \left\{ \left(\frac{\rho}{R} \right)^\beta \phi(R) + B\rho^\beta \right\}.$$

4.2.1 Continuidad Hölder en el Interior

En esta subsección probamos continuidad Hölder de las soluciones del problema (4.1) en un entorno del origen. Para ello, trabajaremos en el interior de una bola pequeña que denotaremos $B_{R_0}(0)$ verificándose que $B_{R_0}(0) \subset \subset \Omega$.

Notación: $u^k = u$ si $u < k$, $u^k = k$ si $u \geq k$; $u_k = u$ si $u > k$, $u_k = k$ si $u \leq k$; u^+ es la parte positiva de u , es decir, $u^+ = \max\{0, u\}$ y $u^- = u^+ - u$ es la parte negativa de u . Dada la bola $B_R(0)$, definimos

$$A^+(k, R) = \{x \in B_R(0) | u(x) > k\}, \quad A^-(k, R) = \{x \in B_R(0) | u(x) < k\}$$

Teorema 4.2.4 (Desigualdad de tipo Cacciopoli) *Sea $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ una solución de la ecuación*

$$-\Delta_{p,\gamma} u = f, \quad \text{en } \Omega$$

con $f \in L_\eta^r(\Omega)$ para algún $r > \frac{N}{p}$, y $\eta = -p^*\gamma \frac{r-1}{r}$. Entonces, para todo $0 < \rho < R < R_0$ y todo $k \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\int_{A(k,\rho)} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx \leq \frac{H}{(R-\rho)^p} \int_{A(k,R)} |x|^{-p\gamma} |u-k|^p dx + H \chi^p |A(k,R)|^{1-\frac{p}{p^*}+\varepsilon}, \quad (4.3)$$

siendo $\varepsilon = \frac{p}{p-1} \left(\frac{p}{N} - \frac{1}{r} \right) > 0$.

Demostración. Primero, observamos que $\varepsilon > 0$ debido al hecho que $r > \frac{N}{p}$.

Definimos la función $t_k^+(u) = u - u^k$ que verifica:

$$\frac{\partial t_k^+}{\partial x_i}(u(x)) = \begin{cases} 0 & \text{en c.t.p. de } A^-(k, \rho), \\ u_{x_i}(x) & \text{en c.t.p. de } A^+(k, \rho). \end{cases}$$

Sea $g(r)$ una función no negativa tal que $g \in C^1([0, \infty))$, $g(r) = 1$ para $r \leq \rho$ y $g(r) = 0$ para $r \geq R$. Es sencillo ver que la función $v(x) = t_k^+(u)g(|x-y|) \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$. Tomando v como función test, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{A^+(k,R)} g(r) |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx + \int_{A^+(k,R)} (u-k) |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \left\langle \nabla u, \frac{x-y}{r} \right\rangle g'(r) dx \\ &= \int_{A^+(k,R)} f g(r) (u-k) dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora estimamos los términos en la igualdad (4.4). Por las desigualdades de Hölder y Young obtenemos:

$$\left| \int_{A^+(k,R)} g'(r) (u-k) |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \left\langle \nabla u, \frac{x-y}{r} \right\rangle dx \right| \quad (4.5)$$

$$\leq \frac{p-1}{p} \int_{A^+(k,R)} g(r) |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p} \int_{A^+(k,R)} \frac{|g'(r)|^p}{|g(r)|^{p-1}} |x|^{-p\gamma} |u(x)-k|^p dx,$$

$$\left| \int_{A^+(k,R)} f g(r) (u-k) dx \right| \leq \left(\int_{A^+(k,R)} \frac{(u-k)^{p^*} g(r)^{p^*}}{|x|^{p^*\gamma}} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (4.6)$$

$$\cdot \left(\int_{A^+(k,R)} |f|^r |x|^{(\gamma+\varepsilon)r} dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{A^+(k,R)} \frac{dx}{|x|^{\varepsilon s}} \right)^{\frac{1}{s}}$$

donde $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, $\varepsilon > 0$. Observamos que podemos tomar $\varepsilon s = p^* \gamma$, $(\gamma + \varepsilon)r = p^* \gamma(r - 1)$. Por tanto, debido a las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg y Young se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{A^+(k, R)} fg(r)(u - k) dx \right| &\leq c\delta \int_{A^+(k, R)} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \left(\int_{A^+(k, R)} |f|^r |x|^{\gamma p^*(r-1)} dx \right)^{\frac{p'}{r}} |A^+(k, R)|^{\frac{p'}{-p^* \gamma} (\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*})}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

para algunas constantes positivas $c(N, p, \Omega)$ y $\delta < 1$. Teniendo en cuenta que

$$p' \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{p^*} \right) = 1 - \frac{p}{N} + \varepsilon,$$

e insertando las desigualdades (4.5) y (4.7) en la igualdad (4.4) con la función

$$g(r) = \begin{cases} & \text{si } 0 \leq r \leq \rho, \\ \frac{(R-r)^p (R+pr - (p+1)\rho)}{(R-\rho)^{p+1}} & \text{si } \rho < r < R, \\ 0 & \text{si } r \geq R, \end{cases}$$

obtenemos la desigualdad (4.3) con $A^+(k, r)$ y donde $H \equiv H(N, p, \delta, \Omega)$,

$$\chi^p \geq \frac{1}{\delta} \left(\int_{A^+(k, R)} |f|^r |x|^{\gamma p^*(r-1)} dx \right)^{\frac{p}{(p-1)r}}.$$

Los mismos cálculos con los cambios oportunos pueden hacerse en el conjunto $A^-(k, r)$, y como consecuencia, se obtiene la desigualdad (4.3) para $A(k, r)$.

■

Observación 4.2.5 Obsérvese que por el Teorema 2.2.7 tenemos garantizada la acotación de toda solución de (4.1). A pesar de ello, en los enunciados de los resultados siguientes, ponemos la hipótesis de acotación en L^∞ para funciones que no necesariamente son solución de (4.1), como por ejemplo, para mínimos o cuasimínimos del funcional de energía asociado al problema (4.1). Se puede decir lo mismo para la desigualdad (4.3).

Lema 4.2.6 Sea $u \in L^\infty$ una función positiva verificando (4.3) para todo $k \in \mathbb{R}$. Entonces si $k_0 < \sup u$ tenemos

$$\sup_{Q_{R/2}} u - k_0 \leq c \left(\int_{A(k_0, R)} |x|^{-p\gamma} (u - k_0)^p dx \right)^{1/p} |A(k_0, R)|_{-p^*\gamma}^{\alpha/p} R^{-\frac{(N-p^*\gamma)\varepsilon}{\alpha p}} R^{-\frac{\gamma(p^*-p)}{\alpha p}} + \chi R^\beta \quad (4.8)$$

donde $p\beta = (N - p^*\gamma)\varepsilon$ y $\alpha^2 + \alpha = \varepsilon$, $\alpha > 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, tomamos $k_0 = 0$. Por la desigualdad (4.3), un simple cálculo nos permite estimar

$$\begin{aligned} & \int_{A(k, \rho)} |x|^{-p\gamma} (u - k)^p dx \\ & \leq c |A(k, r)|^{\frac{p}{N}} \left\{ \frac{1}{(r - \rho)^p} \int_{A(k, r)} |x|^{-p\gamma} (u - k)^p dx + \chi^p |A(k, r)|_{-p^*\gamma}^{1 - \frac{p}{N} + \varepsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

para todo $0 < \rho < r < R$, con $c \equiv c(N, p, \Omega, H) > 0$ siendo H la constante que aparece en la desigualdad (4.3). Si $h < k$, para todo $\rho < r$ tenemos

$$|A(k, \rho)|_{-p\gamma} \leq \frac{1}{(h - k)^p} \int_{A(h, r)} |x|^{-p\gamma} (u - h)^p dx. \quad (4.10)$$

Definamos $U(k, t) = \int_{A(k, t)} |x|^{-p\gamma} (u - k)^p dx$, por las desigualdades (4.9) y (4.10) resulta:

$$\begin{aligned} U(k, \rho) & \leq c(r - \rho)^{-p} U(h, r) |A(h, r)|^{\frac{p}{N}} \\ & \quad + c\chi^p (h - k)^{-p} U(k, r) |A(k, r)|_{-p^*\gamma}^{1 - \frac{p}{N} + \varepsilon} |A(k, r)|_{-p\gamma}^{-1} |A(k, r)|^{\frac{p}{N}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta que $|A(k, r)|_{-p^*\gamma} \leq c r^{\gamma(p-p^*)} |A(k, r)|_{-p\gamma}$, se sigue que

$$\begin{aligned} U(k, \rho) & \leq c(r - \rho)^{-p} U(h, r) |A(h, r)|^{\frac{p}{N}} \\ & \quad + c\chi^p (h - k)^{-p} U(k, r) |A(k, r)|_{-p^*\gamma}^{\varepsilon - \frac{p}{N}} r^{-\frac{p^*\gamma}{N-p}} |A(k, r)|^{\frac{p}{N}} \\ & \leq c \left\{ \frac{r^p}{(r - \rho)^p} + \left(\frac{\chi r^\beta}{h - k} \right)^p \right\} r^{-(N-p^*\gamma)\varepsilon} U(h, r) |A(h, r)|_{-p^*\gamma}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Definamos

$$\phi(k, t) = U(k, t) |A(k, t)|_{-p^*\gamma}^\alpha.$$

Elevando a la potencia α en la desigualdad (4.10) y multiplicando en la desigualdad (4.12) por $|A(k, \rho)|_{-p\gamma}^\alpha$ obtenemos:

$$\phi(k, \rho) \leq c \left[\left(\frac{r}{r-\rho} \right)^p + \left(\frac{\chi r^\beta}{k-h} \right)^p \right] \frac{r^{-(N-p^*\gamma)\varepsilon}}{(k-h)^{p\alpha}} r^{-\gamma(p^*-p)} \phi^{1+\alpha}(h, r). \quad (4.13)$$

Definamos $d = \chi R^\beta + CR^{-\frac{(N-p^*\gamma)\varepsilon}{\alpha p}} R^{-\gamma(p^*-p)} \phi_0^{1/p}$ con C es una constante positiva que será elegida más adelante. Tomemos las sucesiones

$$k_i = d \left(1 - \frac{1}{2^i} \right), \quad r_i = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{1}{2^i} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Para $\phi_i = \phi(k_i, r_i)$, por la desigualdad (4.13), tenemos que

$$\phi_{i+1} \leq cd^{-p\alpha} 2^{p(1+\alpha)i} R^{-(N-p^*\gamma)\varepsilon - \gamma(p^*-p)} \phi_i^{1+\alpha}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Tomando C suficientemente grande, estamos en las hipótesis del Lema 4.2.2, entonces como consecuencia

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi_i = 0, \quad \text{es decir,} \quad \phi(d, \frac{R}{2}) = 0.$$

Por tanto concluimos que

$$\sup_{Q_{R/2}} u \leq d = c \left(\int_{A(0,R)} |x|^{-p\gamma} u^p dx \right)^{1/p} |A(0, R)|_{-p^*\gamma}^{\alpha/p} R^{-\frac{(N-p^*\gamma)\varepsilon - \gamma(p^*-p)}{\alpha p}} + \chi R^\beta.$$

Finalizamos la prueba sustituyendo u por $u - k_0$. ■

Notación: $M(R) = \sup_{x \in Q(R)} u(x)$, $m(R) = \inf_{x \in Q(R)} u(x)$ y $\omega(u, R) = M(R) - m(R)$.

Lema 4.2.7 Sea $u \in L^\infty$ una función verificando la desigualdad (4.3) para todo $k \in \mathbb{R}$. Tomemos $2k_0 = M(2R) - m(2R)$ y supongamos que para algún $0 < \eta < 1$, tenemos

$$|A(k_0, R)| \leq \eta |Q_R|.$$

Entonces, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\omega(u, 2R) \geq 2^{n+1} \chi R^\beta,$$

para $k_n = M(2R) - 2^{-(n+1)} \omega(u, 2R)$, obtenemos

$$|A(k_n, R)| \leq C n^{-\frac{N(p-1)}{p(N-(\gamma+1))}} |Q_R|^{\frac{N-p\gamma-1}{p(N-(\gamma+1))}}.$$

Demostración. Para $k_0 < h < k$ definimos la función de truncamiento

$$G(s) = \begin{cases} k - h & \text{si } s \geq k, \\ s - h & \text{si } h < s < k, \\ 0 & \text{si } s \leq h. \end{cases}$$

Esta función verifica que $G(u) = 0$ en $Q_R \setminus A(k_0, R)$ y por hipótesis:

$$|Q_R \setminus A(k_0, R)| \geq (1 - \eta)|Q_R|.$$

Por la desigualdad de Hardy-Sobolev obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\int_{A(k_0, R)} G(u)^{\frac{N}{N-(\gamma+1)}} dx \right)^{1-\frac{\gamma+1}{N}} &\leq C \int_{Q_R} |x|^{-\gamma} |\nabla G(u)| dx \\ &= C \int_{A(h, R) - A(k, R)} |x|^{-\gamma} |\nabla u| dx. \end{aligned}$$

Definamos $\Delta(h, k) = A(h, R) \setminus A(k, R)$, entonces,

$$\begin{aligned} (k - h)|A(k, R)|^{1-\frac{\gamma+1}{N}} &\leq \left(\int_{Q_R} G(u)^{\frac{N}{N-(\gamma+1)}} dx \right)^{1-\frac{\gamma+1}{N}} \\ &\leq c|\Delta(h, k)|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Delta(h, k)} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, debido a la desigualdad (4.3) con R y $2R$:

$$\begin{aligned} \int_{A(h, R)} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx &\leq \frac{H}{R^p} \int_{A(h, 2R)} |x|^{-p\gamma} (u - h)^p dx + H\chi^p |A(k, 2R)|^{\frac{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}{-p^*\gamma}} \\ &\leq cR^{N-p(\gamma+1)} (M(2R) - h)^p \\ &\quad + c\chi^p R^{(N-p^*\gamma)(1-\frac{p}{N})} (M(2R) - h)^p. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que si $h \leq k_n$, entonces $M(2R) - h \geq M(2R) - k_n \geq c_0\chi R^\beta$ y $c \geq \max\{H, c_0H\}$, además $p\beta = (N - p^*\gamma)\varepsilon$. Por tanto, concluimos que

$$\int_{A(h, R)} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx \leq cR^{N-p(\gamma+1)} (M(2R) - h)^p.$$

Por consiguiente,

$$(k - h)|A(k, R)|^{1 - \frac{\gamma+1}{N}} \leq C|\Delta(h, k)|^{1 - \frac{1}{p}} R^{\frac{N-p(\gamma+1)}{p}} (M(2R) - h). \quad (4.14)$$

Tomando los niveles

$$k_i = M(2R) - \frac{1}{2^{i+1}} \omega(u, 2R),$$

por la desigualdad (4.14) aplicada a $h = k_{i-1}$, $k = k_i$ obtenemos que

$$|A(k_i, R)|^{1 - \frac{\gamma+1}{N}} \leq c|\Delta(k_{i-1}, k_i)|^{1 - \frac{1}{p}} R^{\frac{N-p(\gamma+1)}{p}}.$$

Elevando a la potencia $\frac{p}{p-1}$,

$$|A(k_n, R)|^{\frac{p(N-(\gamma+1))}{N(p-1)}} \leq |A(k_i, R)|^{\frac{p(N-(\gamma+1))}{N(p-1)}} \leq c|\Delta(k_{i-1}, k_i)| R^{\frac{N-p(\gamma+1)}{p-1}}.$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$ tenemos que

$$n|A(k_n, R)|^{\frac{p(N-(\gamma+1))}{N(p-1)}} \leq cR^{\frac{N-p(\gamma+1)}{p-1}} \sum_{i=1}^n |\Delta(k_{i-1}, k_i)| \leq cR^{\frac{N-p(\gamma+1)}{p-1}} |A(k_0, R)|.$$

Finalmente, hemos demostrado que

$$|A(k_n, R)| \leq Cn^{-\frac{N(p-1)}{p(N-(\gamma+1))}} |Q_R|^{\frac{N-p(\gamma+1)}{p(N-(\gamma+1))} + \frac{p-1}{p(N-(\gamma+1))}} = Cn^{-\frac{N(p-1)}{p(N-(\gamma+1))}} |Q_R|^{\frac{N-p\gamma-1}{p(N-(\gamma+1))}}.$$

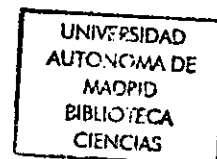
■

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta subsección que es una extensión del teorema clásico de De Giorgi (en [56]) a nuestro contexto.

Teorema 4.2.8 *Sea $u \in L^\infty$ una función verificando la desigualdad (4.3) para todo $k \in \mathbb{R}$. Entonces u es continua Hölder en un entorno del origen. Concretamente, dado $R > 0$ tal que $B_R(0) \subset \subset \Omega$, existe $0 < \kappa < 1$ tal que $u \in C^\kappa(B_R(0))$.*

Demostración. Tomamos $2k_0 = M(2R) - m(2R)$ como hicimos anteriormente. Podemos suponer que

$$|A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2} |Q_R|.$$



Definamos $k_n = M(2R) - \frac{1}{2^{n+1}}\omega(u, 2R)$ entonces se verifica que $k_n > k_0$. En vista de la desigualdad (4.8), con k_n en lugar de k_0 , obtenemos:

$$\begin{aligned} \sup_{Q_{R/2}}(u - k_n) &\leq c \left(\int_{A(k_n, R)} |x|^{-p\gamma} (u - k_n)^p dx \right)^{1/p} |A(k_n, R)|^{\alpha/p}_{-p^*\gamma} R^{-\frac{(N-p^*\gamma)\epsilon}{\alpha p}} R^{\frac{\gamma(p-p^*)}{\alpha p}} \\ &\quad + \chi R^\beta \\ &\leq c \sup_{Q_R}(u - k_n) |A(k_n, R)|^{\alpha/p}_{-p^*\gamma} |A(k_n, R)|^{1/p}_{-p\gamma} R^{-\frac{(N-p^*\gamma)\epsilon}{\alpha p}} R^{\frac{\gamma(p-p^*)}{\alpha p}} + \chi R^\beta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En primer lugar, utilizamos que para n suficientemente grande, se verifica

$$c |A(k_n, R)|^{\alpha/p}_{-p^*\gamma} |A(k_n, R)|^{1/p}_{-p\gamma} R^{-\frac{(N-p^*\gamma)\epsilon}{\alpha p}} R^{\frac{\gamma(p-p^*)}{\alpha p}} < \frac{1}{2}. \quad (4.16)$$

Después probaremos (4.16). Una consecuencia de la desigualdad (4.16) es la siguiente,

$$\omega\left(u, \frac{R}{2}\right) \leq \omega(u, 2R) \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) + c\chi R^\beta. \quad (4.17)$$

Entonces, o bien

$$\omega(u, 2R) \leq 2^{n+1}\chi R^\beta,$$

ó

$$\omega(u, 2R) > 2^{n+1}\chi R^\beta,$$

y como consecuencia, se satisface la desigualdad (4.17). En ambos casos tenemos

$$\omega\left(u, \frac{R}{2}\right) \leq \omega(u, 2R) \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) + c\chi R^\beta.$$

Ahora, aplicando el Lema 4.2.3 con $\theta = \frac{1}{4}$ y $\eta = \log_\theta \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right)$, obtenemos

$$\omega(u, \rho) \leq C \left(\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta \omega(u, R) + \chi \rho^\beta \right), \quad \forall \rho < R < R_0.$$

Para finalizar la demostración, tan solo falta por probar la desigualdad (4.16) que hemos supuesto cierta. Para ello, usamos el Lema 4.2.7. Si

$$\omega(u, 2R) \geq 2^{n+1}\chi R^\beta,$$

$$|A(k_n, R)| \leq C n^{-\frac{N(p-1)}{p(N-(\gamma+1))}} |Q_R|^{\frac{N-p\gamma-1}{p(N-(\gamma+1))}},$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} & c|A(k_n, R)|_{-p^*\gamma}^{\alpha/p} |A(k_n, R)|_{-p\gamma}^{1/p} R^{-\frac{(N-p^*\gamma)\varepsilon}{\alpha p}} R^{\frac{\gamma(p-p^*)}{\alpha p}} \\ & \leq cn^{-\frac{N(p-1)}{p(N-(\gamma+1))}} R^{-\gamma} R^{\frac{N}{p} \frac{N-p\gamma-1}{p(N-(\gamma+1))}} R^{-\frac{N-p^*\gamma}{p} - \frac{\gamma(p^*-p)}{\alpha p}} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para n suficientemente grande, debido a que el exponente en R es no negativo para α o equivalentemente ε suficientemente pequeño. Esto finaliza la prueba de (4.16) y por tanto, del Teorema 4.2.8. ■

4.2.2 Continuidad Hölder en la Frontera

En esta subsección, probaremos continuidad Hölder para las soluciones del Problema (4.1) en entornos de los puntos de la interfase Γ . Por tanto, trabajaremos a lo largo de esta subsección, en conjuntos de la forma $B_\eta(x_0) \cap \Omega$ con $x_0 \in \overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2 = \Gamma$ y $\eta > 0$ pequeño. Teniendo en cuenta que el peso $|x|^{-p\gamma}$ es regular en la frontera, y está acotado superior e inferiormente por dos constantes positivas (dado que $0 \in \Omega$, $0 \notin \partial\Omega$ y $\partial\Omega$ es un conjunto compacto). Observamos que es suficiente demostrar dicha regularidad para las soluciones del problema:

$$(P) \equiv \begin{cases} -\Delta_p u &= f & \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio suave y acotado, $f \in L^r$ para algún $r > \frac{N}{p}$ y las condiciones de contorno $B(\cdot)$ se definen como en (2.2) y (2.3).

Hay resultados conocidos sobre regularidad para este tipo de problemas mixtos en [116], donde para un operador de segundo orden con condiciones de frontera fijas, prueban que las soluciones de (P) están en el espacio $C^\kappa(\overline{\Omega})$ para algún $0 < \kappa < 1/2$ y en [48] probamos este resultado para el operador de Laplace incluso considerando condiciones de contorno variables. Precisamente, las soluciones están en el espacio $C^\kappa(\overline{\Omega})$ para algún $0 < \kappa < 1/2$ con κ independiente de la medida de la parte de condición Dirichlet, $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1) \in [0, \partial\Omega]$. Aquí extendemos los resultados de continuidad hölder dados en [116] y [48] al contexto de este capítulo.

Seguimos la notación descrita en la Sección 1.6 y en la subsección anterior, 4.2.1.

Comenzamos probando que para $y \in \Gamma$, existe una constante positiva τ y algún $\tilde{\rho}(y)$ tal que para todo $0 < \rho < \tilde{\rho}(y)$ se verifica

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega(y,\rho))} \leq \tau \|\nabla u\|_{L^p(\Omega(y,\rho))}, \quad \forall u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega). \quad (4.18)$$

Llamaremos

$$\tilde{\rho} = \sup\{\tilde{\rho}(y) \mid y \in \Gamma, \text{ y se verifica (4.18) } \forall \rho < \tilde{\rho}(y)\}. \quad (4.19)$$

Obsérvese que $\tilde{\rho}$ es estrictamente positivo debido a que estamos tomando condiciones mixtas estrictas, es decir, $\alpha = \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1) > c > 0$.

Lema 4.2.9 *Existe $\tau \in (C(N), \infty)$ independiente de $\alpha \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega))$ tal que la desigualdad (4.18) se verifica.*

La prueba de este lema sigue la misma idea que la del Lema 1.6.1 en el Capítulo 1.

Observación 4.2.10 *Conviene señalar que, este resultado es uno de los puntos clave en el estudio del fenómeno de variación de las condiciones de frontera, de hecho, va a permitir tener propiedades de compacidad, como las utilizadas en el Capítulo 1.*

Lema 4.2.11 *Sea $u \in E_{\Sigma_1}^s(\Omega)$ con $s > 1$. Entonces,*

$$| \{ |u| > \sigma \} |^{\frac{N-s}{N}} \leq \frac{\tau^s}{\sigma^s} \|\nabla u\|_s^s \quad (4.20)$$

$$\int_{\Omega} |u|^s dx \leq \tau^s \int_{\Omega} |\nabla u|^s | \{ |u| > 0 \} |^{\frac{s}{N}} \quad (4.21)$$

Demostración. Es claro que se satisface la desigualdad:

$$\sigma^{s^*} | \{ |u| > \sigma \} | \leq \int_{\Omega} |u|^{s^*} dx,$$

entonces,

$$| \{ |u| > \sigma \} | \leq \frac{1}{\sigma^{s^*}} \int_{\Omega} |u|^{s^*} dx \leq \frac{\tau^{s^*}}{\sigma^{s^*}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^s \right)^{\frac{s^*}{s}},$$

por tanto,

$$| \{ |u| > \sigma \} |^{\frac{N-s}{N}} \leq \frac{\tau^s}{\sigma^s} \int_{\Omega} |\nabla u|^s.$$

Finalmente, la desigualdad (4.21) es consecuencia de la desigualdad de Sobolev. ■

Teorema 4.2.12 Sea $u \in E_{\Sigma_1}^s(\Omega)$ para $s > 1$. Entonces se verifica:

$$\int_{A^+(k,\rho)} |u(x) - k|^s dx \leq \tau^s |A^+(k, \rho)|^{\frac{s}{N}} \int_{A^+(k,\rho)} |\nabla u|^s dx \quad (4.22)$$

y

$$|A^+(h, \rho)|^{\frac{N-s}{N}} \leq \frac{\tau^s}{|h - k|^s} \int_{A^+(k,\rho) - A^+(h,\rho)} |\nabla u|^s dx \quad (4.23)$$

para todo $h > k > 0$ tal que

$$|A^+(k, \rho)| \leq (1 - \lambda) |\Omega(y, \rho)|. \quad (4.24)$$

Demostración. Definamos $t_k^+(u) = u - u^k$, $t_{k,h}^+(u) = u^h - u^k$, entonces $t_k^+(u)$, $t_{k,h}^+(u) \in E_{\Sigma_1}^s(\Omega)$ y se anulan en $\Omega \setminus A^+(k)$. Por la desigualdad (4.24) obtenemos:

$$|[t_k^+(u) = 0] \cap \Omega(y, \rho)| \geq \lambda |\Omega(y, \rho)|,$$

por tanto, deducimos que $[t_k^+(u) = 0] \cap \Omega(y, \rho)$ verifica (4.18). Por (4.21) aplicada a la función $t_k^+(u)$ y (4.20) aplicada a la función $t_{k,h}^+(u)$, con $\sigma < h - k$, $\sigma \rightarrow h - k$ resultan (4.22) y (4.23). ■

Teorema 4.2.13 Sea u una función en $E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$, entonces tenemos

$$|A^+(h, \rho)|^{\frac{pN-p}{N}} \leq (|A^+(k, \rho)| - |A^+(h, \rho)|)^{p-1} \frac{\tau^p}{|h - k|^p} \int_{A^+(k,\rho)} |\nabla u|^p dx. \quad (4.25)$$

Demostración. Elevando a la potencia p/s en la desigualdad (4.23) y usando la desigualdad de Hölder en el término que involucra a la integral del gradiente, resulta:

$$|A^+(h, \rho)|^{\frac{pN-p}{sN}} \leq \frac{\tau^{p/s}}{|h - k|^p} \int_{A^+(k,\rho)} |\nabla u|^p dx (|A^+(k, \rho)| - |A^+(h, \rho)|)^{\frac{p-s}{s}}.$$

Finalmente, pasando al límite cuando $s \searrow 1$ concluimos la desigualdad (4.25). ■

Teorema 4.2.14 (Desigualdad de tipo Cacciopoli) Supongamos que $u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ es solución del Problema (P). Entonces existen dos constantes positivas ζ , Λ independientes de τ tales que para todo $y \in \bar{\Omega}$, $0 < \rho < R < \bar{\rho}(y)$ y todo $k > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{A^+(k,\rho)} |\nabla u|^p dx &\leq \frac{\zeta}{(R - \rho)^p} \int_{A^+(k,R)} |u - k|^p dx \\ &\quad + \Lambda \left(\int_{A^+(k,R)} |f|^r dx \right)^{\frac{p}{(p-1)r}} |A^+(k, R)|^{\frac{p^2}{(p-1)N} (1 - \frac{N}{pr}) + (1 - \frac{p}{N})}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

La demostración de este teorema es idéntica a la del Teorema 4.2.4.

Teorema 4.2.15 Sea $u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega)$ solución del Problema (P). Fijado $0 < \sigma < 1$ y dado $k_1 > 0$, existe una constante $\theta(\sigma) > 0$ tal que fijado $y \in \overline{\Omega}$, $\rho < \tilde{\rho}(y)$, para todo $k > k_1$ verificando

$$|A^+(k, \rho)| \leq \theta |\Omega(y, \rho)| \quad (4.27)$$

entonces

$$|A^+(k + \sigma d, \rho - \sigma \rho)| = 0, \quad (4.28)$$

donde

$$d^p \geq \frac{1}{\theta \rho^N} \int_{A^+(k, \rho)} |u - k|^p dx + \rho^{\frac{p^2}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} \left(\int_{A^+(k, \rho)} |f|^r dx \right)^{\frac{p}{(p-1)r}}. \quad (4.29)$$

Demostración. Escogemos θ de la siguiente manera,

$$\frac{\theta}{(1 - \sigma)^N} \leq \xi(1 - \lambda) \quad (4.30)$$

$$\theta^{\frac{p}{N}} \leq \min \left\{ \frac{\sigma^p}{\tau^p \zeta^{2p+\mu+1} \omega_N^{p/N}}, \frac{\sigma^p \omega_N^{\frac{N-p}{p}}}{\tau^p \zeta^{2p+\nu \frac{N-p}{p} + 1}} \right\} \quad (4.31)$$

$$\theta^{\frac{p^2}{(p-1)N} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} \leq \min \left\{ \frac{1}{\tau^p 2^{\mu+1}}, \frac{1}{2^{1+\nu \frac{N-p}{N}}} \right\} \frac{1}{\Lambda M (\rho^N \omega_N)^{\frac{p^2}{(p-1)N} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)}}$$

donde μ, ν las elegimos como sigue:

$$\nu = \max \left\{ 2p, \frac{2N}{1 - \frac{1}{p-1}} \left(1 - \frac{N}{pr}\right) \right\}, \quad \mu = 2p + \nu \frac{N-p}{N}. \quad (4.32)$$

Sean $y \in \overline{\Omega}$, k verificando la hipótesis (4.27), $h > k$ y $\rho - \sigma \rho \leq R \leq \rho$, entonces:

$$\begin{aligned} |A^+(h, R)| &\leq |A^+(k, \rho)| \leq \theta |\Omega(y, \rho)| \leq \theta \omega_N \rho^N \\ &\leq \theta \frac{\omega_N R^N}{(1 - \sigma)^N} \leq \theta \frac{|\Omega(y, R)|}{\xi(1 - \sigma)^N} \leq (1 - \lambda) |\Omega(y, R)|. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.2.12, se satisfacen (4.22) y (4.23) para todo $h > k > 0$ y $\rho' < \rho''$ en el intervalo $(\rho - \sigma \rho, \rho)$.

Definamos las sucesiones

$$\rho_n = \rho - \sigma\rho + \frac{\sigma\rho}{2^n}; \quad k_n = k + \sigma d - \frac{\sigma d}{2^n}$$

y

$$u_n = \int_{A^+(k_n, \rho_n)} |u - k|^p dx; \quad a_n = |A^+(k_n, \rho_n)|.$$

Por inducción, se prueba que existen constantes $\mu, \nu > 0$ tales que

$$a_n \leq \frac{\theta \rho^N}{2^{\nu n}} \omega_N; \quad u_n \leq \frac{\theta \rho^N}{2^{\mu n}} d^p. \quad (4.33)$$

Pasando al límite con $n \rightarrow \infty$ concluimos el resultado.

Para terminar la demostración, falta probar (4.33). Por los Teoremas 4.2.12 y 4.2.14 con $h > k$, $\rho' < \rho''$ en el intervalo $(\rho - \sigma\rho, \rho)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} |A^+(h, \rho')|^{\frac{N-p}{N}} &\leq \frac{\tau^p}{(h-k)^p} \int_{A^+(k, \rho')} |\nabla u|^p dx \\ &\leq \frac{\tau^p}{(h-k)^p} \left\{ \frac{\zeta}{(\rho'' - \rho')^p} \int_{A^+(k, \rho'')} |u - k|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \left(\int_{A^+(k, \rho'')} |f|^r dx \right)^{\frac{p}{(p-1)r}} |A^+(k, \rho'')|^{1 - \frac{p}{N} + \frac{p^2}{(p-1)N} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

además,

$$\begin{aligned} \int_{A^+(h, \rho')} |u - k|^p dx &\leq \int_{A^+(k, \rho')} |u - k|^p dx \leq c_0 |A^+(k, \rho'')|^{\frac{p}{N}} \int_{A^+(k, \rho')} |\nabla u|^p dx \\ &\leq \tau^p |A^+(k, \rho'')|^{\frac{p}{N}} \left\{ \frac{\zeta}{(\rho'' - \rho')^p} \int_{A^+(k, \rho'')} |u - k|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \left(\int_{A^+(k, \rho'')} |f|^r dx \right)^{\frac{p}{(p-1)r}} |A^+(k, \rho'')|^{1 - \frac{p}{N} + \frac{p^2}{(p-1)N} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

que enlazando con la desigualdad de Caccioppoli, establecida en el Teorema 4.2.14, resulta:

$$\begin{aligned}
 & |A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega; 2\rho)|^{\frac{pN-p}{N}} \\
 & \leq \frac{\tau^p 2^{p(j+2)} \zeta}{\omega^p \rho^p} \left(\int_{A^+(l_1 - \eta_j\omega; 4\rho)} (u - l_1 + \eta_j\omega)^p dx + \omega_N \Lambda M(4\rho)^{\frac{p^2}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} \right) \\
 & \cdot (|A^+(l_1 - \eta_j\omega; 2\rho)| - |A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega; 2\rho)|)^{p-1}.
 \end{aligned}$$

Si $j \leq n$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 & |A^+(l_1 - \eta_n\omega; 2\rho)|^{\frac{pN-p}{N}} \\
 & \leq C \omega_N \rho^{N-p} \left\{ \tau^p \zeta 4^{N-1} + \tau^p \Lambda M 4^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} 2^{p(N+2)} \left(\frac{\rho^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)}}{\omega} \right)^p \right\} \\
 & \cdot (|A^+(l_1 - \eta_j\omega; 2\rho)| - |A^+(l_1 - \eta_{j+1}\omega; 2\rho)|)^{p-1}
 \end{aligned}$$

sumando en la desigualdad anterior con respecto a $j = 1, \dots, n$ tenemos:

$$n |A^+(l_1 - \eta_n\omega; 2\rho)|^{\frac{pN-p}{N}} \leq \omega_N^p \left(\tau^p \zeta + \tau^p \Lambda M 4^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} \left(2^{n+2} \frac{\rho^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)}}{\omega} \right)^p \right) \rho^{p(N-1)}.$$

Ahora definimos

$$R = \tau^p \frac{\omega_N^p}{2^N} \left[\tau^p \zeta 4^{N-1} + \Lambda M 4^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)} \right].$$

Sea \bar{n} tal que $\frac{R}{\bar{n}\omega_N} \leq \theta^{\frac{p(N-1)}{N}}$, es suficiente tomar $\bar{n} \geq C\tau^s$ para algunas constantes positivas C, s . Por lo tanto, tenemos dos alternativas:

1. Si $\omega(\rho) \leq 2^{\bar{n}+2} \rho^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)}$, entonces se verifica la desigualdad (4.37).
2. Si $\omega(\rho) > 2^{\bar{n}+2} \rho^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)}$, entonces:

$$|A^+(l_1 - \eta_{\bar{n}}\omega; 2\rho)| \leq \left(\frac{R}{\bar{n}\omega_N} \right)^{\frac{N}{p(N-1)}} \omega_N (2\rho)^N \leq \theta |\Omega(y, 2\rho)|$$

con lo que obtenemos $l_1 - \eta_{\bar{n}} > 0$ y

$$\text{osc}(u, \rho) \leq \bar{\eta} \text{osc}(u, 4\rho) + \bar{N} \rho^{\frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{N}{pr}\right)}.$$

■

Teorema 4.2.17 Sea u solución del Problema (P) y supongamos las hipótesis del Teorema 4.2.16. Entonces existen dos constantes $H > 0$ y $0 < \kappa = \kappa(\tau) < 1/2$ tales que para todo $y \in \Gamma$, $\rho < \delta(y)$ tenemos

$$\text{osc}(u, \rho) \leq H\rho^\kappa. \quad (4.38)$$

Demostración. Sea $r(y) = \min\{1, \bar{\rho}(y)\}$. Por el Teorema 4.2.16, tenemos que para todo $\rho < r(y)$, se verifica $\omega(\rho) \leq \bar{\eta}\omega(4\rho) + \bar{N}\rho^{\frac{p}{p-1}(1-\frac{N}{pr})}$. Dado $\bar{\eta}$ como en el Teorema 4.2.16, $\bar{\eta} = 1 - \eta_{\bar{n}}$, tomamos $\bar{\kappa}$ tal que $4^{\bar{\kappa}}\bar{\eta} = a < 1$ y definimos $\kappa = \min\left\{\bar{\kappa}, \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{N}{pr}\right)\right\}$. Siguiendo la prueba del Teorema 4.2.16, tenemos que $\bar{n} \geq \frac{R}{\omega_N \theta^{\frac{p(N-1)}{N}}} = c\tau^s$ para algunas constantes positivas c, s , y recordemos que por el Lema 4.2.9, $\tau \in (c(N), \infty)$ no depende de $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1)$. Como consecuencia, \bar{n} es independiente de $\mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1)$, además, $4^{\bar{\kappa}} < \frac{2^{\bar{n}+1}}{2^{\bar{n}+1} - 1}$ y tomando logaritmos:

$$\kappa < \frac{1}{\log 4} \log \left(\frac{2^{\bar{n}+1}}{2^{\bar{n}+1} - 1} \right) \text{ es independiente de } \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1).$$

Sea T una constante positiva tal que $\omega(\rho) \leq T\rho^\kappa$ para $\frac{r(y)}{4} \leq \rho \leq r(y)$, entonces por la cota de la oscilación de u dada en (4.37) deducimos que para $\frac{r(y)}{4^2} \leq \rho \leq \frac{r(y)}{4}$,

$$\omega(\rho) \leq \bar{\eta}4^\kappa T\rho^\kappa + \bar{N}\rho^\kappa.$$

En general para $\frac{r(y)}{4^{i+1}} \leq \rho \leq \frac{r(y)}{4^i}$ obtenemos

$$\omega(\rho) \leq \left\{ (4^\kappa \bar{\eta})^i T + \bar{N} \sum_{s=0}^{i-1} (4^\kappa \bar{\eta})^s \right\} \rho^\kappa \leq \left(Ta^i + \frac{\bar{N}}{1-a} \right) \rho^\kappa.$$

Como podemos tomar i tan grande como para que $Ta^i < 1$, entonces para $\rho < \delta(y) = \frac{r(y)}{4^i}$, $H = 1 + \frac{\bar{N}}{1-a}$, lo cual termina la demostración. ■

Nota 4.2.18 Recordemos que $0 < a < 1$ es un número fijo y $\bar{N} = \frac{1}{2}\|f\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$, por tanto, obtenemos la dependencia explícita $H = 1 + \frac{1}{2(1-a)}\|f\|_{L^r(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$.

Teorema 4.2.19 *Sea u solución de (P). Entonces, $u \in C^\kappa(\bar{\Omega})$ para algún $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ independiente de $\alpha = \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1) \in (0, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega))$. Además, existe una constante positiva $C \equiv C(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f\|_{L^r(\Omega)})$ tal que*

$$\|u\|_{C^\kappa(\bar{\Omega})} \leq C.$$

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \Omega(y, \rho)$, $y \in \Gamma$ y $0 < \rho < \tilde{\rho}$. Entonces:

1. si $|x_1 - x_2| \geq \delta \Rightarrow \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\kappa} \leq 2 \frac{\max u(x)}{\delta^\kappa},$
2. si $|x_1 - x_2| < \delta$, como sabemos que $|u(x_1) - u(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|) \leq H|x_1 - x_2|^\kappa$ obtenemos que

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\kappa} \leq H.$$

El mismo argumento funciona en $\Omega(y, \rho)$ para $y \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma$ (ver [116] por ejemplo). En cualquier caso, obtenemos que $\|u\|_{C^\kappa(\bar{\Omega})} \leq \bar{M}$ donde $\bar{M} = \max \left\{ 2 \frac{\max u(x)}{\delta^\kappa}, H \right\}$. ■

Nota 4.2.20 *Recordemos que $\tilde{\rho}$ es un número positivo tal que la desigualdad (2.3) se verifica $\forall \rho < \tilde{\rho}$. Precisamente, existe una constante positiva τ y algún $\tilde{\rho}$ con $\Omega(y, 2\tilde{\rho}) \subset \bar{\Omega}$, $\forall y \in \Gamma$, tal que $\forall 0 < \rho < \tilde{\rho}$ se verifica:*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega(y, \rho))} \leq \tau \|\nabla u\|_{L^p(\Omega(y, \rho))}, \quad \forall u \in E_{\Sigma_1}^p(\Omega).$$

Corolario 4.2.21 *Dado $0 < \varepsilon < \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)$, $I_\varepsilon = [\varepsilon, \mathcal{H}_{N-1}(\partial\Omega)]$, supongamos que la familia $\{\Sigma_1(\alpha)\}_{\alpha \in I_\varepsilon}$ satisface las hipótesis (2.3) y (B1), (B2) y (B3) descritas en la introducción del Capítulo 1. Entonces para toda solución u_α de (P), existe una constante positiva $C \equiv C(\tilde{\rho}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f\|_{L^r(\Omega)})$ tal que se verifica la estimación*

$$\|u_\alpha\|_{C^\kappa(\bar{\Omega})} \leq C, \quad \text{para todo } \alpha \in I_\varepsilon, \quad 0 < \kappa < \frac{1}{2}.$$

Demostración. Por el Teorema 4.2.19 tenemos que todas las soluciones u_α están en la misma clase de Hölder, $C^\kappa(\bar{\Omega})$. Gracias a las hipótesis (2.3), (B1), (B2) y (B3) existe un radio uniforme $\tilde{\rho} > 0$ tal que la desigualdad (4.18) se verifica para todo $\alpha \in I_\varepsilon$. Debido a la uniformidad de $\tilde{\rho}$ podemos controlar la cantidad

$$\tau = C(N) \left(\frac{1 + \lambda_1(\Omega(y, \tilde{\rho}))}{\lambda_1(\Omega(y, \tilde{\rho}))} \right)^{1/2} < \infty$$

a base de hacer $\tilde{\rho}$ pequeño. Finalmente, por el Teorema 4.2.19 tenemos que

$$\|u\|_{C^\kappa(\bar{\Omega})} \leq \max \left\{ 4 \frac{\|u_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}}{\tilde{\rho}^\kappa}, H \right\}.$$

■

Observación 4.2.22 El hecho de la uniformidad de $\tilde{\rho}$ es lo que permite que las normas Hölder de las soluciones de (P) con $\alpha = \mathcal{H}_{N-1}(\Sigma_1) \in I_\varepsilon$ no exploten, a pesar de tener las normas L^∞ acotadas. Por otro lado, para controlar τ en el Lema 4.2.9, hemos de tomar $\tilde{\rho}$ pequeño, de hecho se verifica que $\tilde{\rho} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow 0$. Este es el motivo por el cual pedimos que $\alpha \in I_\varepsilon$ en el Corolario 4.2.21.

4.3 Estimaciones uniformes en L^∞

En esta subsección demostramos que todas las soluciones del Problema (4.39), para cada $0 \leq \lambda \leq \Lambda$, están acotadas uniformemente en L^∞ , donde:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla u) &= \lambda \frac{u^q}{|x|^{2\beta}} + \frac{u^r}{|x|^{(r+1)\gamma}} \quad \text{en } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{en } \Omega, \\ B(u) &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.39)$$

siendo $\Lambda = \max\{\lambda \mid \text{el problema (4.39) tiene solución}\}$, $0 \leq \gamma < \frac{N-2}{2}$, $\beta < (\gamma+1)$ y $0 < q \leq 1 < r < \frac{N+2}{N-2}$. Precisamente, probamos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1 *Existe una constante positiva C tal que cada solución $u_\lambda \in E_{\Sigma_1}^{2,\gamma}(\Omega)$ del Problema (4.39) verifica*

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \text{para todo } 0 \leq \lambda \leq \Lambda. \quad (4.40)$$

Comenzamos con un resultado que será útil en la demostración del Teorema 4.3.1.

Lema 4.3.2 *Sea $v \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap C^{\nu_0}(\mathbb{R}^N)$ una solución no negativa de la ecuación*

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla v) = \frac{v^r}{|x|^{(r+1)\gamma}}, \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad N > 2 \quad (4.41)$$

con $0 \leq \gamma < \frac{N-2}{2}$ y $1 < r < \frac{N+2}{N-2}$. Entonces $v(x) \equiv 0$.

Demostración. Una prueba del caso $\gamma = 0$ puede verse en [74]. Si $0 < \gamma < \frac{N-2}{2}$, en primer lugar, señalamos que v ha de ser simétrica debido a un resultado de Chou y Chu en [46]. Entonces argumentando de manera similar al Lema 3.4 en [14], se escribe la ecuación (4.41) en coordenadas radiales, y se prueba que v corta el eje radial, lo cual es una contradicción puesto que $v \geq 0$.

■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.3.1.

Supongamos por contradicción que (4.40) no es cierta. Entonces podemos suponer que existe una sucesión de funciones $\{u_k\} \subset E_{\Sigma_1}^{2,\gamma}(\Omega)$, una sucesión de puntos $\{P_k\} \subset \overline{\Omega}$, y una sucesión de números reales $\{\lambda_k\} \subset [0, \Lambda]$ tales que

$$\max_{x \in \Omega} u_k(x) = u_k(P_k) \longrightarrow \infty \text{ para } k \rightarrow \infty,$$

además, podemos suponer para una subsucesión, si es necesario, que $P_k \rightarrow P_0 \in \overline{\Omega}$ y $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ para $k \rightarrow \infty$. Tenemos varias posibilidades dependiendo de la posición del punto límite P_0 en $\overline{\Omega}$:

1. $P_0 \in \Omega \setminus \{0\} \cup \Sigma_1$, entonces obtenemos una contradicción debido a un resultado de Gidas-Spruck, [74].
2. $P_0 \in \Sigma_2$, obtenemos una contradicción debido a un resultado de Lin-Ni-Takagi, [91].
3. $P_0 \in \Gamma = \overline{\Sigma_1} \cap \overline{\Sigma_2}$, en este caso, obtenemos una contradicción como en la prueba del Teorema 1.1.3.
4. $P_0 = 0$, en este caso necesitamos hacer un análisis diferente a todos los antes citados.

Observamos que en los casos 1, 2 y 3 los pesos $|x|^{-2\gamma}$, $|x|^{-2\beta}$ y $|x|^{-(r+1)\gamma}$ son regulares y no degenerados puesto que $0 \in \Omega$ y $P_0 \neq 0$.

Para el caso 4, definamos $M_k = u_k(P_k)$, $\mu_k = M_k^{\frac{1-r}{2(\gamma+1)-(r+1)\gamma}}$ y la función reescalada

$$v_k(z) = \frac{u_k(\mu_k z + P_k)}{M_k},$$

que verifica $\max_{x \in \bar{\Omega}} v_k(x) = v_k(0) = 1$. Además, $P_k \rightarrow 0$. Por un cálculo sencillo tenemos que las funciones v_k verifican

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\left| z + \frac{P_k}{\mu_k} \right|^{-2\gamma} \nabla v_k \right) = \lambda_k \frac{v_k^q M_k^\eta}{|\mu_k z + P_k|^{2\beta}} + \frac{v_k^r}{\left| z + \frac{P_k}{\mu_k} \right|^{(r+1)\gamma}} & \text{en } \Omega_k, \\ v_k > 0 & \text{en } \Omega_k, \\ B_\alpha(v_k) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_k, \end{cases} \quad (4.42)$$

donde $\eta = q - 1 - \frac{2(\gamma+1)(r-1)}{2(\gamma+1) - (r+1)\gamma}$, $\Omega_k = \frac{1}{\mu_k}(\Omega - P_k)$ está dado por la transformación $x \mapsto z = \frac{x - P_k}{\mu_k}$. La próxima etapa consiste en el paso al límite, en primer lugar observamos que dado $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $R > 0$, para k suficientemente grande $B_R(x_0) \subset \Omega_k$, entonces $\frac{v_k^q M_k^\eta}{|\mu_k z + P_k|^{2\beta}} \rightarrow 0$ en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ para $k \rightarrow \infty$.

Por regularidad elíptica, ver la Sección 4.2, tenemos que $u_k \in C^{0,\nu}$, $v_k \in C^{0,\nu}$ para algún $0 < \nu < 1/2$. Además, $\|v_k\|_{C^{0,\nu}} \leq C$ uniformemente en k . Dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \left(-\operatorname{div} \left(\left| z + \frac{P_k}{\mu_k} \right|^{-2\gamma} \nabla v_k \right) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} v_k \left(-\operatorname{div} \left(\left| z + \frac{P_k}{\mu_k} \right|^{-2\gamma} \nabla \varphi \right) \right) dx. \quad (4.43)$$

Po otro lado, tomando $k \gg 1$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega_k$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \left(-\operatorname{div} \left(\left| z + \frac{P_k}{\mu_k} \right|^{-2\gamma} \nabla v_k \right) \right) dx = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi M_k^\eta v_k^q}{|\mu_k z + P_k|^{2\beta}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v_k^r}{\left| z + \frac{P_k}{\mu_k} \right|^{(r+1)\gamma}} \varphi dx. \quad (4.44)$$

Entonces tenemos tres posibilidades:

- Si $\left| \frac{P_k}{\mu_k} \right| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, pasando al límite tenemos que la función límite $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap C^0(\mathbb{R}^N)$ es una solución no negativa de la ecuación

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla v_0) = \frac{v_0^r}{|x|^{(r+1)\gamma}}$$

con $v_0(x) \leq v_0(0) = 1$. Pero por el Lema 4.3.2, esto es una contradicción.

- Si existe un punto $z_0 \in \mathbb{R}^N$, $z_0 \neq 0$ tal que $\left| \frac{P_k}{\mu_k} - z_0 \right| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, pasando al límite, obtenemos que la función límite, v_0 , verifica la ecuación

$$-\operatorname{div}(|z + z_0|^{-2\gamma} \nabla v_0) = \frac{v_0^r}{|z + z_0|^{(r+1)\mu}},$$

con $0 \leq v_0(z) \leq v_0(0) = 1$. Además, por el cambio de variables $z = y - z_0$, la función $\omega(z + z_0) = v_0(z)$ satisface la ecuación:

$$-\operatorname{div}(|y|^{-2\gamma} \nabla \omega(y)) = \frac{\omega^r(y)}{|y|^{(r+1)\gamma}},$$

con $0 \leq \omega(y) \leq \omega(z_0) = 1$, que es de nuevo una contradicción con el Lema 4.3.2.

- Finalmente, si $\left| \frac{P_k}{\mu_k} \right| \rightarrow +\infty$ para $k \rightarrow \infty$, argumentamos de manera diferente. Definamos ahora α_k de manera que $\left| \frac{P_k}{\mu_k^{\alpha_k}} \right| \rightarrow 1$ para $k \rightarrow \infty$, es decir, $\alpha_k = \frac{\log(|P_k|)}{\log(\mu_k)}$, entonces $\alpha_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, y v_k verifica

$$-\frac{M_k}{\mu_k^{2(\gamma\alpha_k+1)}} \operatorname{div} \left(\left| \mu_k^{1-\alpha_k} z + \frac{P_k}{\mu_k^{\alpha_k}} \right|^{-2\gamma} \nabla v_k \right) = \lambda_k \frac{v_k^q M_k^q}{|\mu_k z + P_k|^{2\beta}} + \frac{v_k^r M_k^r \mu_k^{-\alpha_k(r+1)\gamma}}{|\mu_k^{1-\alpha_k} z + \frac{P_k}{\mu_k^{\alpha_k}}|^{(r+1)\gamma}}.$$

Tomando en este caso $\tilde{\mu}_k = M_k^{\frac{1-r}{2(\gamma\alpha_k+1)-\alpha_k(r+1)\gamma}}$, obtenemos

$$-\frac{M_k}{\tilde{\mu}_k^{2(\gamma\alpha_k+1)}} \operatorname{div} \left(\left| \tilde{\mu}_k^{1-\alpha_k} z + \frac{P_k}{\tilde{\mu}_k^{\alpha_k}} \right|^{-2\gamma} \nabla v_k \right) = \lambda_k \frac{v_k^q M_k^q}{|\tilde{\mu}_k z + P_k|^{2\beta}} + \frac{v_k^r}{|\tilde{\mu}_k^{1-\alpha_k} z + \frac{P_k}{\tilde{\mu}_k^{\alpha_k}}|^{(r+1)\gamma}},$$

$$\text{donde } \rho = q - 1 - \frac{2(\alpha_k\gamma + 1)(r - 1)}{2(\alpha_k\gamma + 1) - \alpha_k(r + 1)\gamma}.$$

Además, $\rho < 0$ para cada $k \geq k_0$ puesto que $\alpha_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$. Como consecuencia, el término cóncavo converge a cero en $L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Pasando al límite, podemos suponer que para una subsucesión si es necesario, $\frac{P_k}{\tilde{\mu}_k} \rightarrow x_0 \in S^{N-1}$, y argumentado como antes, obtenemos una contradicción y por tanto terminamos la demostración. \blacksquare

4.4 Concentración-compacidad: extensión de un teorema de P. L. Lions

En esta sección extendemos a nuestro contexto un teorema clásico de concentración y compacidad debido a P. L. Lions en el caso $\gamma = 0$ y $p = 2$ (véase [93] Partes I, II).

Teorema 4.4.1 Sea $\{u_n\} \subset E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ una sucesión débilmente convergente a una función $u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$ con $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$. Supongamos, para alguna subsucesión, que existen

tres medidas positivas μ , ν y η sobre $\overline{\Omega}$ tales que $|x|^{-p\gamma}|\nabla u_n|^p$, $|x|^{-p\gamma}|u_n|^{p^*}$ y $\frac{|u_n|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}}$ convergen en el sentido de las medidas a μ , ν y η respectivamente.

Entonces existe un conjunto numerable J , distintos puntos $\{x_j\}_{j \in J} \subset \overline{\Omega}$ con $x_0 = 0$ y números reales positivos μ_j , ν_j y η_0 verificando:

$$1. \mu \geq |x|^{-p\gamma}|\nabla u|^p + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j},$$

$$2. \nu = |x|^{-p\gamma}|u|^{p^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

$$3. \mu_j \geq \overline{S} \nu_j^{p/p^*} \quad \forall j \in J,$$

$$4. \eta = \frac{|u|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} + \eta_0 \delta_0,$$

$$5. \mu_0 \geq \eta_0 \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1),$$

donde $\overline{S} = S_{p,\gamma}^p(\Omega, \Sigma_1)$ está definida por

$$S_{p,\gamma}^p(\Omega, \Sigma_1) = \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx}{\left(\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |u|^{p^*} dx \right)^{p/p^*}}, \quad (4.45)$$

y

$$\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \inf_{u \in E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}} dx}. \quad (4.46)$$

Denotamos por $S_{p,\gamma}^p$ y $\Lambda_{N,p,\gamma}$ las constantes de Sobolev y Hardy-Sobolev, respectivamente, en $\mathcal{D}_{\gamma}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ó $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$), dado que por un argumento de reescale, permanecen invariantes).

La demostración de este teorema sigue las ideas de Lions y está basa en el siguiente lema de Teoría de la Medida.

Lema 4.4.2 Sean μ y ν dos medidas no negativas y acotadas en $\overline{\Omega}$, tales que para $1 \leq p < r < \infty$ existe una constante $C > 0$ verificando

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^r d\nu \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \quad \text{con} \quad \varphi|_{\Sigma_1} = 0. \quad (4.47)$$

Entonces existe un conjunto a lo más numerable de índices I , una sucesión de puntos $\{x_j\}_{j \in I} \subset \bar{\Omega}$ y una sucesión de números reales $\{\nu_j\}_{j \in I} \subset (0, +\infty)$, tales que:

$$\nu = \sum_{j \in I} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \mu \geq C^{-p} \sum_{j \in I} \nu_j^{\frac{p}{p-1}} \delta_{x_j},$$

donde δ_{x_j} es la Delta de Dirac centrada en x_j , $j \in I$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.4.1

Dada $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ con $\varphi|_{\Sigma_1} = 0$, por la desigualdad de Hardy-Sobolev:

$$\left(\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |u_n|^{p^*} |\varphi|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \bar{S}^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |\nabla(\varphi u_n)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.48)$$

Supongamos que el límite débil es $u \equiv 0$. Entonces pasando al límite para $n \rightarrow \infty$ en la desigualdad (4.48) obtenemos:

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^{p^*} d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \bar{S}^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.49)$$

de manera que podemos aplicar el Lema 4.4.2.

En caso contrario, si el límite débil es $u \not\equiv 0$, definimos $v_n = u_n - u$. Por el Lema de Brezis-Lieb, [35], tenemos que

$$\int_{\Omega} |\varphi|^{p^*} |u_n|^{p^*} dx - \int_{\Omega} |\varphi|^{p^*} |v_n|^{p^*} dx + o_n(1) = \int_{\Omega} |\varphi|^{p^*} |u|^{p^*} dx.$$

Entonces, por la desigualdad de Hardy-Sobolev aplicada a v_n llegamos a una desigualdad de Hölder al revés del tipo de la desigualdad (4.47), y por aplicación directa del Lema 4.4.2, obtenemos

$$\nu = |x|^{-p\gamma} |u|^{p^*} + \sum_{j \in I} \nu_j \delta_{x_j}.$$

Por la desigualdad (4.48) y teniendo en cuenta que $|u_n||x|^{-\gamma} \rightarrow |u||x|^{-\gamma}$ fuertemente en $L^p(\Omega)$, (ver el Lema 2.2.10 y el Corolario 2.2.11 donde este resultado está probado en un caso más general) entonces:

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^{p^*} d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}} \bar{S}^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |x|^{-p\gamma} |u|^p |\nabla \varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.50)$$

para toda función $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi = 0$ sobre Σ_1 . Consideramos φ una función C^∞ con soporte la bola unidad $B \subset \mathbb{R}^N$, verificando que $0 \leq \varphi \leq 1$ y $\varphi(0) = 1$. Fijado $j \in I$,

$\varepsilon > 0$, consideramos $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$. Para ε suficientemente pequeño tenemos que

$$\nu_j^{\frac{1}{p^*}} \bar{S}^{\frac{1}{p}} \leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \varepsilon^{-p} |x|^{-p\gamma} |u|^p |\nabla \varphi_\varepsilon(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ahora, por la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \varepsilon^{-p} |x|^{-p\gamma} |u|^p |\nabla \varphi_\varepsilon(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |x|^{-p^* \gamma} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\quad \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \varepsilon^{-N} |\nabla \varphi_\varepsilon(x)|^N dx \right)^{\frac{1}{N}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

entonces pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ resulta que

$$\mu_j \geq \nu_j^{\frac{p}{p^*}} \bar{S}, \quad j \in I. \quad (4.52)$$

La desigualdad (4.52) se puede leer de manera equivalente como sigue:

$$\mu \geq \sum_{j \in I} \nu_j^{\frac{p}{p^*}} \bar{S} \delta_{x_j} \equiv \mu_1.$$

Pero dado que $u_n \rightharpoonup u$ en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, $\mu \geq |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p$, y que $|x|^{-p\gamma} |\nabla u|^p$ y μ_1 son medidas mutuamente ortogonales, concluimos la prueba de los apartados 1, 2 y 3 en el Teorema 4.4.1.

Argumentando de manera similar con la sucesión $\frac{|u_n|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}}$, obtenemos, usando de nuevo el Lema 4.4.2, que

$$\eta = \sum_{j \in J} \eta_j \delta_{y_j}.$$

Teniendo en cuenta que la sucesión $\frac{|u_n|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}}$ es relativamente compacta en $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(0)$

para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y que converge débilmente a $\frac{|u|^p}{|x|^{p(\gamma+1)}}$ en $E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)$, obtenemos que existe una única Delta de Dirac, la cual debe estar centrada en el origen. Este hecho demuestra el apartado 4 del Teorema 4.4.1, y la desigualdad de Hardy-Sobolev establecida en (3.7), implica el apartado 5 del citado teorema. ■

Parte II

Ecuaciones Parabólicas

Capítulo 5

Ecuaciones parabólicas semilineales relacionadas con las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

5.1 Introducción

En los ejemplos de problemas de *reacción-difusión* en los que aparece la ecuación del calor con un término de reacción *supercrítico*, normalmente se obtiene una solución singular estacionaria. Por ejemplo, este es el caso para la ecuación de la combustión de un sólido,

$$u_t - \Delta u = \lambda e^u, \quad \text{y para su aproximación,} \quad u_t - \Delta u = \lambda u + u^{\alpha-1}, \quad \text{donde} \quad \frac{2N}{N-2} < \alpha.$$

(Véanse [72] y [98] respectivamente). En el primer caso la solución *singular* es $S(x) = -2(N-2) \log |x|$. En el segundo caso el término principal es del mismo orden logarítmico pero tiene otros términos acotados.

La ecuación linealizada correspondiente a la solución estacionaria singular es del tipo,

$$u_t - \Delta u = \lambda \frac{u}{|x|^2}. \quad (5.1)$$

(Véanse [106],[32], [33] y [39], para el caso exponencial).

El hecho de que para este tipo de problemas la teorías clásicas de unicidad y regularidad no sean aplicables, en tanto que el problema es crítico, hacen que su estudio sea interesante.

La ecuación lineal (5.1) fue estudiada por Baras-Goldstein en [19], donde se obtuvo el comportamiento de las soluciones en términos del parámetro λ . Precisamente Baras y Goldstein demuestran que el valor crítico de λ , $\lambda = \Lambda_{N,2,0} = (N-2)^2/4$, determina el comportamiento de la ecuación (5.20). Hacemos notar que $\Lambda_{N,2,0}$ es la mejor constante en la desigualdad clásica de Hardy, y que tal constante no se alcanza en el espacio de Sobolev. Esta observación y algunas aplicaciones de la misma fueron obtenidas en [106].

Notación: Denotamos en este capítulo la constante de Hardy

$$\Lambda_N := \Lambda_{N,2,0} \equiv \frac{(N-2)^2}{4}$$

por simplificar, dado que no hay lugar a confusión.

Formulamos a continuación el resultado de Baras y Goldstein en lo que a nuestro trabajo concierne. Ver [19] para más detalles.

TEOREMA (Baras-Goldstein).

Consideremos el problema de valores iniciales con dato de tipo Dirichlet en la frontera,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{\lambda}{|x|^2} u, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, t > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega, \quad f \in L^2, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde Ω es un dominio tal que $0 \in \Omega$, entonces:

- i) Si $\lambda \leq \Lambda_N$, el problema (5.2) tiene solución global única.
- ii) Si $\lambda > \Lambda_N$ el problema (5.2) no tiene solución local si $f > 0$. Además, si v_n es la solución del problema truncado para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \min \left\{ n, \frac{\lambda}{|x|^2} \right\} u, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, t > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \Omega, \quad f \in L^2, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) = \infty$, para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$.

A este comportamiento le llamamos *explosión espectral instantánea y completa*, (que por brevedad escribimos SICB) en el sentido que el problema de valor inicial tiene solución

global para cualquier dato inicial positivo en, por ejemplo, L^2 si $\lambda < \Lambda_N$, y, en las mismas condiciones, no tiene solución para $\lambda \geq \Lambda_N$.

La primera impresión es que este fenómeno de S.I.C.B. se debe a que la constante optimal en la desigualdad de Hardy no se alcanza y es la misma para cualquier dominio que continene al origen. Es decir, se podría conjeturar, de forma imprecisa, que si en un problema parabólico la parte elíptica es la ecuación de Euler de un problema de minimización con propiedades análogas a la desigualdad clásica de Hardy, entonces habría de tenerse un comportamiento de *explosión espectral instantánea y completa*.

Un ejemplo importante de este tipo de desigualdades son las de Hardy-Sobolev, las cuales son un caso particular de las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg establecidas en la Proposición 2.2.3.

ESTA CONJETURA NO ES CIERTA. Se necesitan algunos ingredientes más para producir el fenómeno de S.I.C.B.

Analizamos en este capítulo cuándo es posible extender los resultados de Baras y Goldstein en [19] y de Brezis-Cabré en [32] al caso de operadores relacionados con las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg que dan lugar a operadores diferenciales lineales.

Observación 5.1.1 *En los artículos [9], [52] y [70] se han obtenido resultados para algunos tipos de ecuaciones parabólicas cuasilineales relacionadas con la desigualdad de Hardy-Sobolev establecida en [41], mostrando que, la explosión espectral instantánea y completa no es verdad en general, en el sentido que, aún cuando el parámetro λ es más grande que la constante óptima en la correspondiente desigualdad de Hardy-Sobolev, existe una solución, en algún sentido que depende del problema concreto.*

En este capítulo estudiamos el siguiente problema,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \lambda \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} + f \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T) \text{ y } u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.4)$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regular acotado que contiene 0, $\lambda > 0$, $\alpha \geq 1$, $-1 \leq \gamma \leq \frac{N-2}{2}$, f y u_0 son funciones positivas tales que $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$.

El caso $\gamma = 0$ es exactamente el problema estudiado por Baras y Goldstein en [19], es decir, (5.2).

El caso $(1 + \gamma) \leq 0$ es un caso particular de los resultados en [52] donde se demuestra, en particular, que el Problema (5.4) con $\alpha = 1$ tiene solución global débil para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, no hay fenómeno de explosión aunque la constante optimal de la desigualdad de Hardy-Sobolev correspondiente no se alcanza y es la misma para cualquier dominio que contenga el origen. Se dará una idea de este resultado, que en este caso lineal es bastante elemental.

Al final de nuestro análisis descubrimos que la diferencia fundamental con el caso en que $(1 + \gamma) \leq 0$, es que si $(1 + \gamma) > 0$, la ecuación homogénea asociada verifica la desigualdad de Harnack parabólica (5.12). Nos centraremos, principalmente, en el caso $(1 + \gamma) > 0$.

Este hecho fue demostrado por Chiarenza-Serapioni en [45], y en casos más generales por Gutiérrez y Wheeden en [82]. Nótese que la condición sobre γ es óptima para la verificación de la desigualdad de Harnack como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.2 Supongamos que $(1 + \gamma) \leq 0$ y consideremos $u(x, t) = t|x|^\rho$ donde $\rho > 0$. Por cálculo directo obtenemos

$$u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = |x|^\rho - \rho t |x|^{\rho-2(\gamma+1)} (\rho + N - 2(\gamma + 1)).$$

Como $\rho > 0$ y $(\gamma + 1) \leq 0$, eligiendo $r_0, t_0 > 0$ suficientemente pequeños, u es una supersolución del problema (5.11) en el cilindro $B_{r_0}(0) \times (0, t_0)$. Como $u(0, t) = 0$, incluso la desigualdad de Harnack débil, dada por (5.14), no es válida.

Para el caso $\alpha > 1$ un análisis de la homogeneidad pone de manifiesto que el comportamiento respecto a la explosión instantánea y completa es independiente de λ (deja de ser espectral según nuestra terminología).

El caso $\gamma = 0$, es decir, la ecuación del calor con una perturbación $u^\alpha |x|^{-2}$ fue analizada en detalle por Brezis-Cabré en [32] donde se demuestra que hay explosión completa e instantánea para cualquier dato positivo.

La falta de regularidad requiere una precisión sobre el sentido en que se toman las soluciones para extender los resultados anteriores al caso $\gamma \neq 0$.

Los espacios de Sobolev $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,p}(\Omega)$ definidos en el Capítulo 2 con $p = 2$, $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)$, son espacios de Hilbert. Nótese que $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ si $\gamma > 0$ y $W_0^{1,2}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)$ si $\gamma \leq 0$. En todo caso, como $(1 + \gamma) > 0$, estamos trabajando siempre con distribuciones.

Recordamos que el truncamiento de una función u se define por

$$T_k(u) = u - \operatorname{sign}(u)(|u| - k)_+.$$

Definición 5.1.3 Se dice que $u \in \mathcal{T}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega \times (0, T))$ si $T_k(u) \in L^2((0, T), \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega))$ para todo $k > 0$.

Siguiendo los artículos [26] y [109], definimos el concepto de solución de entropía.

Definición 5.1.4 Sean $F \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$. Una función $u \in C([0, T], L^1(\Omega))$ es una solución de entropía del problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = F & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

cuando dada $u \in \mathcal{T}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega \times (0, T))$, para cualquier función $v \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times [0, T]) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$ tal que $v_t \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{-\gamma}^{-1,2}(\Omega))$ se verifica

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Theta_k(u - v)(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} v_t T_k(u - v) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla (T_k(u - v)) |x|^{-2\gamma} dx dt \\ &= \int_{\Omega} \Theta_k(u_0 - v(0)) dx + \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx dt, \end{aligned} \quad (5.6)$$

para cualquier $k > 0$, siendo

$$\Theta_k(s) = \int_0^s T_k(t) dt. \quad (5.7)$$

Definición 5.1.5 Diremos que u es solución de entropía del Problema (5.4) con $f \equiv 0$ si definiendo $F(x, t) \equiv \frac{\lambda u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}$ entonces $F \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y u es solución de entropía del Problema (5.5) en el sentido de la definición anterior.

Nótese que como $u \in C((0, T); L^1(\Omega))$,

$$\int_{\Omega} u_t T_k(u) dx = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \Theta_k(u) dx \right)$$

ó

$$\int_{\Omega} \Theta_k(u(t)) dx - \int_{\Omega} \Theta_k(u(0)) dx = \int_0^t \int_{\Omega} u_s T_k(u) dx ds.$$

Usando los mismos argumentos que en [26] y en [109] se puede demostrar el siguiente resultado de unicidad para soluciones de entropía.

Teorema 5.1.6 *Sea Ω un dominio regular acotado, supongamos que $F \in L^1(\Omega \times (0, T))$, $u_0 \in L^1(\Omega)$, entonces el Problema (5.5) tiene una única solución de entropía. Si F y u_0 son funciones positivas, entonces $u \geq 0$.*

Como consecuencia tenemos el siguiente principio de comparación que usamos con frecuencia en este capítulo.

Lema 5.1.7 *Sean u, v soluciones de entropía de (5.5) con datos f, u_0 y g, v_0 respectivamente.*

Si $0 \leq g \leq f$ y $0 \leq v_0 \leq u_0$, entonces $0 \leq v \leq u$.

Una modificación obvia de los argumentos de Boccardo y Gallouët en [29] (véase también [27]) permite probar que si u es la solución de entropía del problema (5.5), entonces

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^q |x|^{-2\gamma} dx \right)^r dt < \infty, \quad (5.8)$$

siendo $1 \leq q < \frac{N-2\gamma}{N-2\gamma-1}$ y $1 \leq r < 2$ tales que $\frac{N-2\gamma}{q} + \frac{2(\gamma+1)}{r} > N+1$.

Este capítulo lo organizamos como sigue:

- En la Sección 5.2 formulamos con precisión la desigualdad de Harnack probada en [45] y demostramos una versión débil que utilizaremos con frecuencia.
- En la Sección 5.3 estudiamos el caso $(\gamma+1) \leq 0$, estableciendo la existencia de solución global usando una estimación de energía conveniente. En [52] pueden encontrarse los detalles del caso más general, y en el capítulo siguiente en el que extendemos a los problemas mixtos algunos de los resultados de este capítulo y de [52].
- En la Sección 5.4 consideramos también las soluciones entendidas en el sentido débil siguiente.

Definición 5.1.8 *Sean $f(x, t) \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$.*

Decimos que $u \in C([0, T], L^1((1 + |x|^{-2\gamma-1})dx))$, es una solución débil del problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = f(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } L^1(\Omega), \end{cases} \quad (5.9)$$

si para todo $0 < s < T$, tenemos

$$\int_0^s \int_{\Omega} u(-\psi_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \psi)) - \int_{\Omega} u_0 \psi(0) = \int_0^s \int_{\Omega} f \psi dx dt, \quad (5.10)$$

para cualquier $\psi \in C^2(\Omega \times [0, s])$ con $\psi = 0$ sobre $\partial\Omega \times [0, s]$.

Nótese que $u(x, 0) = u_0$ significa que $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u(x, t) - u_0(x)| dx = 0$.

El resultado principal de esta sección es el de unicidad para el problema (5.9) recogido en el Teorema 5.4.1. Este resultado es consecuencia de un teorema de tipo Weyl para el problema elíptico asociado, probado en [5].

- Los resultados principales sobre la no existencia y explosión instantánea y completa son el contenido de la Sección 5.5, con $(\gamma+1) > 0$. En la primera Subsección, 5.5.1, se demuestran los Teoremas 5.5.1 y 5.5.6 sobre la no existencia y *la explosión espectral instantánea y completa* en el caso lineal.

En la Subsección 5.5.2 estudiamos el caso superlineal, es decir, $\alpha > 1$ en el problema (5.9). Los resultados fundamentales de este apartado son los Teoremas 5.5.8 y 5.5.11. Demostramos, sin ninguna restricción sobre λ , la no existencia y la explosión instantánea y completa de los problemas aproximados para cualquier dato no negativo y no idénticamente nulo, respectivamente.

- En la Sección 5.6 estudiamos el caso sublineal, $0 < \alpha < 1$, para el cual probamos la existencia de una solución global. Además, obtenemos el comportamiento de la solución, en el caso en que el dato inicial está dominado por la única solución estacionaria de la ecuación elíptica asociada.

Hemos de hacer notar que el método de demostración es distinto al usado por Baras-Goldstein [19], fuertemente ligado a la fórmula de representación de las soluciones de la ecuación del calor, y por Brezis-Cabré [32]. Buscando un método que fuese válido para los problemas cuasilineales, nuestro método de demostración de la no existencia se basa en la extensión de desigualdad de Picone, Teorema 2.2.2. En particular, obtenemos una demostración alternativa a la de Baras-Goldstein en el caso de la ecuación del calor.

Publicación. Los resultados de este capítulo son esencialmente el contenido del artículo [1] en colaboración con B. Abdellaoui, quien también incluyó dicho artículo como un capítulo en su Tesis Doctoral.

5.2 La desigualdad de Harnack y algunas extensiones

Una de las propiedades fundamentales en el estudio que vamos a acometer es la desigualdad de Harnack, más precisamente saber para qué valores de γ se verifica. La desigualdad de Harnack parabólica para nuestra familia de operadores con fue obtenida por Chiarenza y Serapioni en [45] y extendida a contextos más generales por Gutiérrez y Wheeden en [82]. Como hemos visto en el sencillo ejemplo de la introducción, si $\gamma \leq -1$ no se verifica la desigualdad de Harnack. Consideramos la ecuación

$$u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad (5.11)$$

en el caso complementario, es decir, con $1 + \gamma > 0$.

Decimos que $u \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$ es una solución de energía del problema (5.11) si

$$\int_0^T \int_{\Omega} v_t u + \int_0^T \int_{\Omega} |x|^{-2\gamma} \nabla u \nabla v = 0, \quad \forall v \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega)).$$

En este sentido tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2.1 (Desigualdad de Harnack.) *Supongamos que u es solución positiva de energía del Problema (5.11) con $(\gamma + 1) > 0$ y sea $R = B_{\rho}(x_0) \times (t_0 - \beta, t_0 + \beta) \subset \Omega \times (0, T)$. Entonces existe una constante $C \equiv C(N, \gamma, \rho, t_0, \beta)$ tal que*

$$\operatorname{ess\,sup}_{R^-} u \leq C \operatorname{ess\,inf}_{R^+} u, \quad (5.12)$$

donde $R^- = B_{\rho/2}(x_0) \times (t_0 - \frac{3}{4}\beta, t_0 - \frac{1}{4}\beta)$ y $R^+ = B_{\rho/2}(x_0) \times (t_0 + \frac{1}{4}\beta, t_0 + \beta)$.

Véase [45] para la demostración, y [82] para algunas extensiones. Nótese que si $\gamma = 0$ es el resultado de J. Moser en [102].

Si u es una supersolución positiva del Problema (5.11), entonces se tiene la siguiente desigualdad de Harnack débil. Dado que en general nuestras soluciones lo son en sentido de entropía, necesitamos una versión débil que se pueda utilizar en este sentido. Siguiendo los argumentos de [45] demostramos el siguiente resultado.

Teorema 5.2.2 *Sea $u \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$ solución positiva del Problema (5.11) con $(\gamma + 1) > 0$. Entonces existe una constante positiva $C \equiv C(N, \gamma, \rho, t_0, \beta)$ tal que*

$$\int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x, t) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_{R^+} u \quad \forall t \in (t_0 - \frac{3}{4}\beta, t_0 - \frac{1}{4}\beta). \quad (5.13)$$

Además,

$$\int \int_{R^-} u(x, t) dx dt \leq C \operatorname{ess\,inf}_{R^+} u. \quad (5.14)$$

Demostración. Seguimos los argumentos de [45].

Como $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$, entonces existe $\bar{t} \in [t_0 - \frac{3}{4}\beta, t_0 - \frac{1}{4}\beta]$ tal que

$$\sup_{t \in (t_0 - \frac{3}{4}\beta, t_0 - \frac{1}{4}\beta)} \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x, t) dx = \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x, \bar{t}) dx. \quad (5.15)$$

Sea v la solución del problema

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla v) &= 0 \text{ en } \Omega \times (\bar{t}, t_0 + \beta), \\ v(x, \bar{t}) &= u(x, \bar{t}) \text{ si } x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.16)$$

Por el lema de comparación, Lema 5.1.7, tenemos $u \geq v$. Sea ξ la solución positiva del problema adjunto

$$\begin{cases} -\xi_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \xi) &= h \text{ en } \Omega \times (\bar{t}, t_0 + \beta), \\ \xi(x, t_0 + \beta) &= 0 \text{ si } x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.17)$$

donde h es una función positiva acotada que elegiremos convenientemente. Por el Principio del Máximo tenemos que $\xi \geq 0$. Usando ξ como función test en (5.16) obtenemos

$$-\int_{\Omega} \xi(x, \bar{t}) v(x, \bar{t}) dx + \int_{\bar{t}}^{t_0 + \beta} \int_{\Omega} v(-\xi_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \xi)) dx dt = 0,$$

por tanto

$$\int_{\bar{t}}^{t_0 + \beta} \int_{\Omega} v(x, t) h(x, t) dx dt = \int_{\Omega} u(x, \bar{t}) \xi(x, \bar{t}) dx \geq \min_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} \xi(x, \bar{t}) \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x, \bar{t}) dx.$$

Eligiendo $h = \chi_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} \chi_{(t_0 + \frac{1}{4}\beta, t_0 + \beta)}$, tenemos que

$$\int \int_{R^+} v(x, t) dx dt \geq \min_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} \xi(x, \bar{t}) \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x, \bar{t}) dx.$$

Por el Teorema 5.2.1 aplicado a v , obtenemos que

$$\operatorname{ess\,sup}_R v \leq c \operatorname{ess\,inf}_{R^+} v \leq c \operatorname{ess\,inf}_{R^+} u. \quad (5.18)$$

Finalmente, por (5.15) y (5.18) obtenemos

$$\int_{R^-} \int u(x, t) \leq c_1 \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x, \bar{t}) dx \leq c_2 \operatorname{ess\,inf}_{R^+} u,$$

donde c_1, c_2 son constantes positivas independientes de u . ■

Este último resultado lo utilizaremos en particular para analizar el comportamiento de las soluciones de los problemas truncados. Concretamente lo utilizamos para demostrar la explosión completa.

Si $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$ son dos funciones positivas, en general la solución de entropía del problema (5.5) no es acotada, por tanto, no se verifica en general la desigualdad de Harnack clásica. Sin embargo, usando un argumento de aproximación, podemos probar que la solución de entropía del problema (5.5) satisface una desigualdad de Harnack débil. Más precisamente probamos el siguiente corolario.

Corolario 5.2.3 *Supongamos que u es solución positiva en sentido de entropía del Problema (5.5) con $f, u_0 \geq 0$. Entonces existe una constante positiva $C \equiv C(N, \gamma, \rho, t_0, \beta)$ tal que*

$$\sup_{t \in (t_0 - \frac{3}{4}\beta, t_0 - \frac{1}{4}\beta)} \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x, t) dx \leq C \operatorname{ess\,inf}_{R^+} u. \quad (5.19)$$

Como consecuencia, si f y u_0 son funciones positivas, obtenemos el Principio Fuerte del Máximo para la solución en sentido de entropía del problema (5.5).

Observación 5.2.4 *En el intervalo, $0 < 1 + \gamma < \frac{N}{2}$, para el cual tenemos la desigualdad de Harnack parabólica, podemos calcular con un argumento de homogeneidad, como en la ecuación del calor, una solución autosemejante de tipo gaussiana, es decir,*

$$E(x, t) = C \frac{H(t)}{t^{\frac{N}{2(\gamma+1)}}} \exp\left(-\frac{|x|^{2(\gamma+1)}}{4(\gamma+1)^2 t}\right), \text{ donde } H \text{ es la función de Heaviside.}$$

Normalizando la constante C obtenemos que

$$E_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla E) = \delta_{(0,0)},$$

donde $\delta_{(0,0)}$ es la delta de Dirac en el punto $(x, t) = (0, 0)$. El hecho de ser una ecuación con coeficientes variables, no permite escribir la solución de $u_t - \Delta_{2,\gamma} u = f$ como solución con E .

Notación: Por simplificar, dado que no hay lugar a confusión, denotamos en este capítulo la constante de Hardy-Sobolev

$$\Lambda_{N,\gamma} := \Lambda_{N,2,\gamma} \equiv \frac{(N - 2(\gamma + 1))^2}{4}.$$

5.3 Algunos resultados de existencia de soluciones

En esta sección demostramos que si $\alpha = 1$ el problema (5.4) tiene solución si:

$$(i) \quad \lambda < \Lambda_{N,\gamma} \quad y \quad -\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$$

ó

$$(ii) \quad (1 + \gamma) \leq 0 \quad y \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En este caso no se verifica el fenómeno de *explosión espectral instantánea y completa*.

Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u \geq 0 \text{ y } u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \quad u_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (5.20)$$

Entonces tenemos la siguiente estimación *a priori*:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma} dx d\tau = \lambda \int_0^t \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2(x) dx. \quad (5.21)$$

- En el caso (i), usando la desigualdad de Hardy-Sobolev

$$\int_{\Omega} u^2(x, t) dx + 2 \left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda_{N,\gamma}} \right) \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma} dx d\tau \leq \int_{\Omega} u_0^2(x) dx.$$

Con esta estimación para las soluciones u_n de los problemas con el potencial truncado, obtenemos una solución global definida como el límite de las u_n . En efecto, podemos pasar al límite usando el Teorema 4.1 de Boccardo-Murat en [30], y teniendo en cuenta que la sucesión $\{u_n\}$ es no decreciente y la estimación anterior, obtenemos una solución global definida por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

que verifica $u \in L^\infty([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); E_{\Sigma_1}^{2,\gamma}(\Omega))$.

- En el caso (ii) dado que $(\gamma + 1) \leq 0$, tenemos que

$$\int_0^t \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx d\tau \leq c(\Omega) \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx d\tau.$$

Por tanto, existe una constante $c_0 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} u^2(x, T) dx \leq \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + c_0 \int_0^T \int_{\Omega} u^2(x, t) dx dt$$

de manera que si definimos $y(T) = \|u(\cdot, T)\|_2^2$ y $\beta = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$, la estimación anterior se lee como

$$y(T) \leq \beta + c_0 \int_0^T y(s) ds. \quad (5.22)$$

Por el Lema de Gronwall obtenemos que

$$y(T) \leq \beta + \beta c_0 \int_0^T e^{c_0 s} ds,$$

esto es, tenemos $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(T)$. Como consecuencia, u está definida para todo tiempo $t > 0$, es decir, es una solución global. Además, u_n están uniformemente acotadas en $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T]; E_{\Sigma_1}^{2, \gamma}(\Omega))$, por tanto, usando de nuevo el resultado de Boccardo-Murat junto con la estimación apriori (5.22), para una subsucesión adecuada, existe el límite de las truncadas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

que es una solución global de (5.20).

Y como en el caso (i), se concluye la existencia de solución global.

La teoría de ecuaciones parabólicas lineales, tras un argumento de perturbación en ambos casos, permite concluir el siguiente resultado

Teorema 5.3.1 *Tomemos $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $T > 0$ y suponemos:*

$$i) \quad \lambda < \Lambda_{N, \gamma} \text{ y } -\infty < \gamma < \frac{N-2}{2} \quad \text{ó}$$

$$ii) \quad (1 + \gamma) \leq 0 \text{ y } \lambda > 0.$$

Entonces el problema (5.20) tiene una única solución

$$u \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{0, \gamma}^{1, 2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Observación 5.3.2 *Este resultado es un caso particular de un resultado de existencia probado en [52]. Además, el resultado en el segundo caso es independiente de la relación entre λ y $\Lambda_{N, \gamma}$. Los detalles y extensiones al caso cuasilineal pueden verse en [52].*

5.4 Un resultado de unicidad

El resultado principal de esta parte es el siguiente teorema de unicidad con $\gamma \in (-\infty, \frac{N-2}{2})$, cuya demostración está profundamente inspirada en los métodos de los trabajos de Bénilan-Brezis-Crandall en [22], Brezis-Crandall [34] y M. Pierre en [108]. Este resultado extiende los resultados clásicos para la ecuación del calor.

Teorema 5.4.1 *Sea u una solución débil (en el sentido de la definición (5.1.8)) del problema*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla u) = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } L^1(\Omega) \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (5.23)$$

entonces $u \equiv 0$.

Demostración. Por simplicidad de notación, ponemos $L_\gamma v \equiv \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla v)$. Para u en las hipótesis, comprobamos que

$$u(t) - u(s) = L_\gamma \int_s^t u(\sigma) d\sigma \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (5.24)$$

En efecto, definimos $X(t) = \int_\Omega u(x, t)\phi(x)dx$ donde $t \in (0, T)$ y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, en particular, tenemos que $X \in L^1(0, T)$. Dado $\alpha \in C_0^\infty(0, T)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle X', \alpha \rangle &\equiv -\langle X, \alpha' \rangle \\ &= -\int_0^T \int_\Omega u(x, t)\phi(x)\alpha'(t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega u(x, t)\alpha(t)L_\gamma(\phi(x))dxdt, \end{aligned}$$

por tanto

$$X'(t) = \int_\Omega u(x, t)L_\gamma(\phi(x))dx \text{ en } \mathcal{D}'(0, T). \quad (5.25)$$

Como $\int_\Omega u(x, t)L_\gamma(\phi(x))dx \in L^1(0, T)$, entonces integrando en (5.25) se obtiene la identidad (5.24).

Como $\int_\Omega |u(x, s)|dx \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0$, concluimos que

$$u(t) = L_\gamma \int_0^t u(\sigma) d\sigma \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (5.26)$$

Tomamos $v(t)$ la solución débil del problema elíptico

$$-L_\gamma v(t) = u(t), \quad v(t)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.27)$$

Como $u(t) \in L^1(\Omega)$, podemos utilizar la unicidad del problema elíptico (véanse el apéndice de [1] ó [5]) para concluir que

$$v(t) = - \int_0^t u(\sigma) d\sigma.$$

Entonces v es una función diferenciable en t y

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t) = u(t) \in L^1_{d\mu}(\Omega \times (0, T)), \quad d\mu = (|x|^{-2\gamma-1} + 1) dx dt.$$

Por consiguiente obtenemos que v es la solución débil del problema

$$-L_\gamma v(t) = u(t) = -\frac{\partial v}{\partial t}, \quad v(t)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.28)$$

Usando $T_k(v)$ como función test en (5.28) obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla T_k(v)|^2 |x|^{-p\gamma} dx = - \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} T_k(v) dx = - \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\int_\Omega \Theta_k(v) dx \right),$$

donde Θ_k está definida por (5.7). Integrando en el tiempo resulta

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla T_k(v)|^2 |x|^{-p\gamma} dx + \int_0^T \int_\Omega \Theta_k(v(T)) dx = 0.$$

Como $\Theta_k(s) \geq 0$, entonces $|\nabla T_k(v)| \equiv 0$ para cualquier $k > 0$ y por lo tanto $v \equiv 0$, de donde obtenemos que $u \equiv 0$. ■

Proposición 5.4.2 *Sea u la solución de entropía del problema (5.5), entonces u es solución débil en el sentido de la definición 5.1.8.*

Demostración. Teniendo en cuenta la estimación (5.8) para $|\nabla u|$ obtenemos por las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg que

$$\left(\int_\Omega |x|^{-2\gamma-1} |u|^s dx \right)^{1/s} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma} dx \right)^{1/2},$$

para $1 \leq s < \frac{N-2\gamma-1}{N-2(\gamma+1)}$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos que $u \in L^1(\Omega, |x|^{-2\gamma-1} dx)$ y por la definición de solución de débil se concluye. ■

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.4.3 Sean $f(x, t) \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$, entonces el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = f(x, t) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } L^1(\Omega), \end{cases} \quad (5.29)$$

tiene una única solución $u \in C([0, T], L^1((1 + |x|^{-2\gamma-1})dx))$.

5.5 Resultados de no existencia de soluciones: Explosión completa en el caso $(\gamma + 1) > 0$

Teniendo en cuenta el Teorema de unicidad 5.4.1 basta probar que no existe solución de entropía y, en consecuencia, se pueden usar las técnicas de aproximación y truncamiento.

5.5.1 El caso lineal: $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}$.

Consideramos en primer lugar el problema lineal,

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.30)$$

donde u_0 es una función positiva tal que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}$.

Sea $u \in C([0, T], L^1((1 + |x|^{-2(\gamma+1)})dx))$ solución débil de la ecuación en el sentido de la definición 5.1.8. Escribiendo $f(x, t) = \frac{\lambda u}{|x|^{2(\gamma+1)}}$, el Teorema 5.4.1 implica que u es solución de la ecuación lineal con segundo miembro $f(x, t)$, es decir, u es solución de entropía de (5.30) (en el sentido de la definición (5.1.5)).

El resultado principal de esta subsección es el siguiente teorema.

Teorema 5.5.1 Supongamos que $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}$. Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ una función no negativa, $u_0 \not\equiv 0$. Entonces el problema (5.30) con $(\gamma + 1) > 0$ no tiene solución positiva en el sentido de entropía.

Demostración. Argumentamos por contradicción. Sea $u \geq 0$ una solución de entropía positiva del problema (5.30), por el Corolario 5.2.3 obtenemos que $u > 0$.

Definimos

$$a_n(x) = \frac{1}{|x|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{n}} \quad (5.31)$$

y

$$g_n(s) = \min\{n, s\}. \quad (5.32)$$

Denotamos u_n la única solución del problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla u_n) = \lambda a_n(x)g_n(u) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \text{ y } u_n(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.33)$$

Así definida, $u_n \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$. Como $u_0 \neq 0$, por la desigualdad de Harnack (5.13) obtenemos que $u_n > 0$ en $\Omega \times (0, T)$, por tanto usando la definición de u como solución de entropía del problema (5.30) concluimos que u_n converge a u en $\mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega))$. Nótese que $\{a_n(x)g_n(u)\}$ es una sucesión creciente con respecto a n , por tanto $\{u_n\}$ es también creciente.

Usando de nuevo la desigualdad de Harnack (5.13) conseguimos que

$$u_1 \geq \varepsilon \text{ en c.t.p. de } B_\eta \times (\tau, T)$$

para $0 < \tau < T$ y $B_\eta = B_\eta(0)$. Como $u \geq u_1$, entonces $u \geq \varepsilon$ en c.t.p. de $B_\eta \times (\tau, T)$. Para $\delta > 0$, existe una constante $c = c(\eta, \delta)$ tal que la función $v(x) = c \left(\log \frac{1}{|x|} - \log \frac{1}{|\eta|} \right)$ es una solución estacionaria de

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla v) = \frac{\delta}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } B_\eta(0) \times (\tau, T), \\ v|_{\partial B_\eta(0)} = 0. \end{cases} \quad (5.34)$$

Definimos la función $w(x, t) = (t - \tau)v(x)$, para $t \in (\tau, T)$. Entonces w satisface:

$$\begin{cases} w_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla w) = v(x) + (t - \tau) \frac{\delta}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } B_\eta(0) \times (\tau, T), \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_\eta(0) \end{cases} \quad (5.35)$$

y $\lim_{t \rightarrow \tau} \int_{B_\eta(0)} w(x, t) \phi(x) dx = 0$, para todo $\phi \in C_0^\infty(B_\eta(0))$. Es decir, $w(x, t)$ es una solución de energía y, por tanto, de entropía para el problema (5.35).

Como $w_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla w) \leq v(x) + T \frac{\delta}{|x|^{2(\gamma+1)}}$ y $\lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{2(\gamma+1)}v(x) = 0$, entonces podemos escoger $\delta > 0$ y $\eta > 0$ tales que $w_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla w) \leq \frac{\varepsilon}{|x|^{2(\gamma+1)}}$ en $B_\eta(0) \times (\tau, T)$.

Sea w_n la única solución positiva del problema

$$\begin{cases} (w_n)_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla w_n) = \varepsilon a_n(x) & \text{en } B_r(0) \times (\tau, T), \\ (w_n) = 0 & \text{sobre } \partial B_r(0) \end{cases} \quad (5.36)$$

entonces por el Lema de comparación, Lema 5.1.7:

$$w(x, t) \leq w_\infty(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x, t).$$

Como $u_n(x, t) \geq u_1(x, t) \geq \varepsilon$, por el principio de comparación débil, $w_n(x, t) \leq u_n(x, t) \leq u(x, t)$ para cualquier $(x, t) \in B_r(0) \times (\tau, T)$.

Sea $\tau_1 \in (\tau, T)$. Como $\lim_{|x| \rightarrow 0} w(x, t) = \infty$ uniformemente en $t \in [\tau_1, T_1] \subset (\tau, T)$, obtenemos que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \infty \quad \forall t \in [\tau_1, T_1].$$

Entonces para todo $c \gg 1$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\eta_1 > 0$ tales que para cualquier $n \geq n_0$, resulta $u_n(x, t) \geq c$ en $B_{\eta_1}(0)$ y uniformemente en $t \in [\tau_1, T_1]$.

Sea $B_{\bar{\eta}}(0) \subset\subset B_{\eta_1}(0)$ y $\psi \in C_0^\infty(B_{\bar{\eta}}(0))$. Por la desigualdad de Picone, Teorema 2.2.2, se consigue que

$$\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 \frac{-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n)}{u_n} dx, \quad \text{para cualquier } t \in [\tau_1, T_1].$$

Entonces

$$\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \lambda \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 a_n(x) \frac{g_n(u)}{u_n} dx - \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 \frac{(u_n)_t}{u_n} dx \quad (5.37)$$

e integrando en el tiempo resulta

$$\int_{\tau_1}^{T_1} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx dt \geq \lambda \int_{\tau_1}^{T_1} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 a_n(x) \frac{g_n(u)}{u_n} dx dt - \int_{\tau_1}^{T_1} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 \frac{(u_n)_t}{u_n} dx dt.$$

Como $x \in B_{\bar{\eta}}(0)$, entonces $u_n(x) \gg 1$. Por tanto estimando el último término obtenemos que

$$\int_{\tau_1}^{T_1} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx dt \geq \lambda \int_{\tau_1}^{T_1} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 a_n(x) \frac{g_n(u)}{u} dx dt - \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 \log(u_n(x, T)) dx. \quad (5.38)$$

Como $g_n(u)a_n(x) \nearrow \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} \in L^1(B_{\bar{\eta}}(0) \times (\tau_1, T))$ y $\frac{|\psi|^2}{u} \in L^\infty(B_{\bar{\eta}}(0) \times (\tau_1, T))$, usando el Teorema de la Convergencia Monótona concluimos que

$$\lambda \int_{\tau_1}^{T_1} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 a_n(x) \frac{g_n(u)}{u} dx dt \rightarrow \lambda(T_1 - \tau_1) \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} \frac{|\psi|^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx.$$

Definamos la función $\zeta(x) = \frac{1}{T_1 - \tau_1} \log(u(x, T_1))$. Dado que $u(\cdot, T_1) \in L^1(B_{\bar{\eta}}(0))$, obtenemos que $\zeta \in L^p(B_{\bar{\eta}}(0))$ para cualquier $p \geq 1$, en particular, dado que $\gamma + 1 > 0$ se verifica que $\zeta \in L^p(B_{\bar{\eta}}(0))$ para $p > \frac{N}{2(\gamma+1)}$, por tanto como en el Capítulo 2 tenemos bien definido el autovalor

$$\lambda(\bar{\eta}) = \inf_{\{\phi \in C_0^\infty(B_{\bar{\eta}}(0)) : \phi \neq 0\}} \frac{\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx}{\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} \zeta \phi^2 dx}.$$

En efecto, sea $p > \frac{N}{2(\gamma+1)}$ entonces el exponente conjugado p' satisface $2p' < \frac{2N}{N-(2\gamma+1)}$, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |x|^{-2\gamma} |\nabla \phi|^2 dx &= \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} \zeta \phi^2 dx \leq \left(\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\zeta|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\phi|^{2p'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq C \left(\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |x|^{-2\gamma} |\nabla \phi|^2 dx \right)^{\frac{2p'}{2^*}} \end{aligned}$$

y concluimos que $\lambda(\bar{\eta}) \rightarrow \infty$ cuando $\bar{\eta} \rightarrow 0$. Es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe η_ε pequeño tal que $\lambda(\eta_\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Tomemos ε tal que $\frac{\lambda}{1+\varepsilon} > \Lambda_{N,\gamma}$ y consideremos el correspondiente $\bar{\eta} = \eta_\varepsilon$. Entonces de (5.38) concluimos que

$$\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \frac{\lambda}{1+\varepsilon} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} \frac{|\psi|^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(B_{\bar{\eta}}(0)).$$

Como $\frac{\lambda}{1+\varepsilon} > \Lambda_{N,\gamma}$, tenemos una contradicción con la optimalidad de $\Lambda_{N,\gamma}$, que finaliza la demostración del resultado. ■

Observación 5.5.2 El Teorema 5.5.1 se verifica incluso si tomamos el dato inicial $u_0 \in L^1(\Omega)$. Supongamos por reducción al absurdo que u es solución positiva del Problema (5.30) con dato inicial $u_0 \in L^1(\Omega)$, entonces u es supersolución del Problema (5.30) con dato

inicial acotado, $u_{0,n}(x) = \min\{n, u_0(x)\}$ y esto nos da una contradicción con el Teorema 5.5.1 para datos iniciales acotados.

Como consecuencia tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 5.5.3 Sea $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}$. Si $u_0 \equiv 0$, entonces la única solución de entropía no negativa del Problema (5.30) con $(\gamma + 1) > 0$ es $u \equiv 0$.

Corolario 5.5.4 Supongamos que $(\gamma + 1) > 0$, $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$ son funciones positivas tales que $(f, u_0) \neq (0, 0)$. Entonces, el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + f, & u \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.39)$$

donde $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}$ no tiene solución de entropía positiva.

Nótese que en la prueba del Teorema 5.5.1 no se usa una representación explícita de las soluciones. Por tanto es una prueba alternativa del resultado de Baras-Goldstein, [19], en el caso $\gamma = 0$. Véase a este respecto también el artículo de Cabré-Martel, [39]. Ahora podemos probar el siguiente resultado de explosión completa.

Lema 5.5.5 Supongamos que $(\gamma + 1) > 0$. Sea u_n la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n) = \lambda a_n(x) g_n(u_n) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \text{ y } u_n(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (5.40)$$

donde $a_n(x)$, $g_n(s)$ están definidas por (5.31) y (5.32). Sea $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tal que $u_0 \geq 0$ y $u_0 \not\equiv 0$. Entonces para cualquier $r > 0$ tal que $B_{4r}(0) \subset \Omega$ y para todo $t \in (0, T)$ resulta

$$\int_{B_r} u_n(x, t) dx \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (5.41)$$

Demostración. Argumentamos por contradicción. Para ello, suponemos que existen τ , $r_0 > 0$ tales que

$$\int_{B_{r_0}} u_n(x, \tau) dx \leq C \text{ para todo } n.$$

Obsérvese que la sucesión $\{u_n\}$ es creciente en n ; por tanto, existe el límite puntual $u_n(x, \tau) \nearrow u(x, \tau)$ para todo $x \in B_{r_0}$ y verifica $u(x, \tau) \in L^1(B_{r_0})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B_{4r_0} \subset \Omega$.

Por la desigualdad de Harnack débil para u_n , existe una constante $C_1 \equiv C_1(\tau, N, \gamma, r_0)$ tal que para todo $t \in (\tau/4, \tau/3)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_0}(0)} u_n(x, t) dx &\leq C_1 \inf\{u_n(x, t) | (x, t) \in B_{r_0}(0) \times (\tau/2, 3\tau/2)\} \\ &\leq C_1 \frac{1}{|B_{r_0}(0)|} \int_{B_{r_0}(0)} u_n(x, \tau) dx \leq C_2 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $\bar{\tau}$ tal que $(\bar{\tau}/5, \bar{\tau}/4) \subset\subset (\tau/4, \tau/3)$, podemos definir $u(x, t)$ para todo $(x, t) \in B_{r_0}(0) \times (\bar{\tau}/5, \bar{\tau}/4)$ y $\int_{\Omega} u(x, t) dx < \infty$, uniformemente en $t \in (\bar{\tau}/5, \bar{\tau}/4)$. Además, usando el mismo argumento que en la demostración del Teorema 5.5.1, concluimos que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $u_n \geq u > \varepsilon_1$ en $B_{r_0}(0) \times (\bar{\tau}/5, \bar{\tau}/4)$ y que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \infty \text{ uniformemente para } t \in (\tau_2, \tau_3).$$

Sea $B_{\bar{\eta}}(0) \subset\subset \Omega$ tal que $u_n(x, t) \gg 1$ para cualquier $(x, t) \in B_{\bar{\eta}}(0) \times (t_1, t_2)$ con $\tau_2 < t_1 < t_2 < \tau_3$, y $\psi \in C_0^\infty(B_{\bar{\eta}}(0))$. Por el Teorema 2.2.2 tenemos

$$\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \lambda \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 a_n(x) \frac{g_n(u_n)}{u_n} dx - \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 \frac{(u_n)_t}{u_n} dx. \quad (5.42)$$

Integrando en (t_1, t_2) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx dt &\geq \lambda \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 a_n(x) \frac{g_n(u_n)}{u_n} dx dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\psi|^2 \frac{(u_n)_t}{u_n} dx dt. \end{aligned}$$

Como $u_n \nearrow u$ en $L^1(B_{\bar{\eta}}(0) \times (t_1, t_2))$, usando el mismo argumento que en la demostración del Teorema 5.5.1 concluimos que

$$\int_{B_{\bar{\eta}}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \frac{\lambda}{1 + \varepsilon} \int_{B_{\bar{\eta}}(0)} \frac{|\psi|^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(B_{\bar{\eta}}(0)).$$

donde podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\frac{\lambda}{1 + \varepsilon} > \Lambda_{N, \gamma}$, que contradice la optimalidad de $\Lambda_{N, \gamma}$. ■

Podemos ahora formular el resultado de explosión completa.

Teorema 5.5.6 Sea u_n la solución positiva del problema (5.40) con $(\gamma + 1) > 0$, entonces para todo punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0, t_0) = \infty$.

Demostración. Sea $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$, si $x_0 \in B_r(0)$, tal que $B_{4r}(0) \subset \Omega$, usando la desigualdad de Harnack débil conseguimos que

$$u_n(x_0, t_0) \geq c \int_{B_r(0)} u_n(x, t_0 - \varepsilon) dx,$$

donde $c = c(N, \gamma, r)$ y $\varepsilon > 0$ es tal que $t_0 - \varepsilon > 0$.

Por el Lema 5.5.5, obtenemos

$$\int_{B_r(0)} u_n(x, t_0 - \varepsilon) dx \rightarrow \infty,$$

de donde concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0, t_0) = \infty$.

Si $x_0 \notin B_r(0)$, suponemos en primer lugar que $B_r(0) \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$, entonces existe $y \in \Omega$ tal que $B_\eta(y) \subset B_r(0) \cap B_r(x_0)$. Usando de nuevo la desigualdad de Harnack débil y el Lema 5.5.5 obtenemos que

$$\begin{aligned} u_n(x_0, t_0) &\geq c \int_{B_r(x_0)} u_n(x, t_0 - \varepsilon) dx \geq c \int_{\overline{B}_\eta(y)} u_n(x, t_0 - \varepsilon) dx \\ &\geq c \min_{x \in \overline{B}_\eta(y)} u_n(x, t_0 - \varepsilon) \geq cu_n(x_1, t_0 - \varepsilon), \end{aligned}$$

donde c es una constante positiva independiente de u_n . Como $x_1 \in B_r(0)$, entonces $u_n(x_1, t_0 - \varepsilon) \rightarrow \infty$, por lo tanto $u_n(x_0, t_0) \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$.

En el caso general, si $x_0 \in \Omega$ arbitrario, entonces como $d(x, B_r(0)) < \infty$, usando un argumento de iteración, en un número finito de pasos concluimos. ■

Observación 5.5.7 Cabe destacar que si consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + f, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.43)$$

con f una función no negativa tal que $f(x, t) > c > 0$ en un entorno de $\{0\} \times (0, T)$, y bajo las hipótesis generales sobre Ω , $\lambda > \Lambda_{N, \gamma}$, $u_0 \geq 0$, entonces podemos repetir la prueba de la no existencia y explosión para todo $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$. La propiedad relevante es que en este caso, la ecuación

$$u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = f$$

satisface el Principio Fuerte del Máximo.

5.5.2 El caso superlineal: $\alpha > 1$, $(\gamma + 1) > 0$.

En esta subsección estudiamos el problema,

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (5.44)$$

donde $\alpha > 1$. El comportamiento del problema (5.44) es diferente del caso lineal, debido a la distinta homogeneidad del operador y el segundo miembro; por tanto, es independiente de λ . Por este motivo, suponemos sin pérdida de generalidad que $\lambda = 1$. Precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.5.8 *Sea u_0 una función positiva tal que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $u_0 \not\equiv 0$, entonces el problema (5.44) con $(\gamma + 1) > 0$ no tiene solución positiva en el sentido de entropía. Además, si $u_0 \equiv 0$, la única solución no negativa es $u \equiv 0$.*

Demostración. Supongamos que u es solución positiva en sentido de entropía del problema (5.44). Sean a_n definido por (5.31), $g_n(s) = \min\{n, s^\alpha\}$ y $f_n(x, t) = a_n(x)g_n(u(x, t))$; entonces $f_n(x, t) \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ y $f_n(x, t) \nearrow f(x, t) = \frac{u^\alpha(x, t)}{|x|^{2(\gamma+1)}}$ en $L^1(\Omega \times (0, T))$.

Como $|x|^{2\gamma} f_n \in L^r(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx)$ con $r > \frac{N-2\gamma}{2}$, tenemos la integrabilidad requerida para obtener la acotación en L^∞ para los problemas truncados (véase [44]). Sea u_n la única solución global positiva del problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n) = f_n(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_n(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.45)$$

Entonces, $u_n \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ y como $u_0 \not\equiv 0$, por la desigualdad de Harnack débil concluimos que $u_n > 0$ en $\Omega \times (0, T)$. Nótese que $\{f_n\}$ es creciente con respecto a n , por tanto obtenemos que $\{u_n\}$ es también creciente y converge a u en $C([0, T]; L^1(\Omega))$. Usando de nuevo la desigualdad de Harnack débil conseguimos que

$$u \geq u_1 \geq \varepsilon \text{ en c.t.p. de } B_\eta \times (\tau, T)$$

donde $0 < \tau < T$ y $B_\eta = B_\eta(0) \subset\subset \Omega$. Usando los mismos argumentos que en la demostración del Teorema 5.5.1, obtenemos que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \infty \text{ uniformemente en } t \in (\tau, T).$$

Entonces para todo $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\eta_1 > 0$ tal que $u_n(x, t) \geq c$ para cualquier $x \in B_{\eta_1}(0)$ y uniformemente en $t \in (\tau, T)$. Sea $\bar{c} > \sup\{1, \alpha - 1\}$ tal que

$$(\alpha - 1)\bar{c}^{\alpha-1} - 4(\alpha - 1)\frac{\log(\bar{c})}{T - \tau} > \Lambda_{N, \gamma}, \quad (5.46)$$

Además existe η , $0 < \eta < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $u_n \geq 2\bar{c}$ en $B_\eta(0) \times (\tau, T)$. Sea la función,

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\bar{c}^{\alpha-1}} - \frac{1}{s^{\alpha-1}} \right) & \text{si } s > \bar{c}, \\ \frac{1}{\bar{c}^\alpha} (s - \bar{c}) & \text{si } s \leq \bar{c}. \end{cases} \quad (5.47)$$

Nótese que $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, es una función cóncava y $\phi'(s) = \frac{1}{s^\alpha}$ para todo $s > \bar{c}$, en particular, $0 < \phi'(s) < \frac{1}{\bar{c}^\alpha}$. Como $\phi(s)$ es una función regular para $s > \bar{c}$, y $u_n > \bar{c}$ para todo $n \geq n_0$ en $B_\eta(0) \times (\tau, T)$, tenemos que

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \phi(u_n)) = \phi'(u_n) (-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n) - \phi''(u_n) |x|^{-2\gamma} |\nabla u_n|^2).$$

Teniendo en cuenta que $\phi(u_n) \leq \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{\bar{c}^{\alpha-1}}$, $\phi'' < 0$ y $u_n(x) > \bar{c} > 1$ en $B_\eta(0)$, obtenemos que

$$(\phi(u_n))_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \phi(u_n)) \geq \phi'(u_n) ((u_n)_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n)) = \phi'(u_n) f_n.$$

Sea $\psi \in C_0^\infty(B_\eta(0))$, por la desigualdad de Picone, Teorema 2.2.2, conseguimos que

$$\int_{B_\eta(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 \frac{-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \phi(u_n))}{\phi(u_n)} dx,$$

por tanto

$$\int_{B_\eta(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 f_n \frac{\phi'(u_n)}{\phi(u_n)} dx - \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 \frac{(u_n)_t (\phi'(u_n))}{\phi(u_n)} dx. \quad (5.48)$$

Integrando en (τ, T) obtenemos que

$$\int_\tau^T \int_{B_\eta(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} \geq \int_\tau^T \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 f_n \frac{\phi'(u_n)}{\phi(u_n)} - \int_\tau^T \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 \frac{(u_n)_t (\phi'(u_n))}{\phi(u_n)}. \quad (5.49)$$

Dado que $x \in B_\eta(0)$, $u_n(x, t) > \bar{c}$, entonces

$$\frac{1}{\phi(u_n)} \geq (\alpha - 1) \bar{c}^{\alpha-1}.$$

Por otro lado $\phi'(u_n)f_n \rightarrow \phi'(u)\frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}$ en c.t.p. de Ω . Como $\phi'(u_n) \leq a$ para todo $n \geq n_0$ donde a es una constante fija para cualquier $x \in B_\eta(0)$, obtenemos $\phi'(u_n)f_n \leq af$ para cualquier $x \in B_\eta(0) \times (\tau, T)$. Entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada concluimos que

$$\phi'(u_n)f_n \rightarrow \phi'(u)\frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} = \frac{1}{|x|^{2(\gamma+1)}} \text{ en } L^1(B_\eta(0) \times (\tau, T)).$$

Por consiguiente, tenemos la desigualdad,

$$\int_\tau^T \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 f_n \frac{\phi'(u_n)}{\phi(u_n)} dx dt \geq (T - \tau)(\alpha - 1)\bar{c}^{\alpha-1} \int_{B_\eta(0)} \frac{|\psi|^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx + o(1).$$

Para estimar el término que contiene la derivada con respecto a t , procedemos como sigue.

Sea,

$$I = \left| \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 \int_\tau^T \frac{(u_n)_t \phi'(u_n)}{\phi(u_n)} dt dx \right| = \left| \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 \left(\log \frac{\phi(u_n(T))}{\phi(u_n(\tau))} \right) dx \right|.$$

Como $\phi(u_n) \leq \phi(u)$, obtenemos que

$$I \leq 2 \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 |\log(\phi(u(T)))| dx \leq 4(\alpha - 1) \log(\bar{c}) \int_{B_\eta(0)} |\psi|^2 dx,$$

sustituyendo en (5.49) e integrando en el tiempo, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{B_\eta(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx &\geq \left((\alpha - 1)\bar{c}^{\alpha-1} - 4(\alpha - 1) \frac{\log(\bar{c})}{T - \tau} \right) \int_{B_\eta(0)} \frac{|\psi|^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx \\ &= \Lambda \int_{B_\eta(0)} \frac{|\psi|^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(B_\eta(0)), \end{aligned}$$

donde

$$\Lambda := (\alpha - 1)\bar{c}^{\alpha-1} - 4(\alpha - 1) \frac{\log(\bar{c})}{T - \tau}.$$

Por (5.46) obtenemos que $\Lambda > \Lambda_{N,\gamma}$, una contradicción con la optimalidad de $\Lambda_{N,\gamma}$. ■

Corolario 5.5.9 Sean $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$ dos funciones no negativas tales que $(f, u_0) \neq (0, 0)$ y $(\gamma + 1) > 0$. Entonces el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} + f, & u \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.50)$$

no tiene solución positiva de entropía.

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado de explosión completa.

Lema 5.5.10 *Supongamos $(\gamma + 1) > 0$ y sea u_n la solución del problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n) = a_n(x) g_n(u_n) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n \geq 0 & \text{en } \Omega, \quad u_n|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_n(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5.51)$$

Entonces para todo $r > 0$ tal que $B_{4r}(0) \subset \Omega$, y para todo $t \in (0, T)$:

$$\int_{B_r} u_n(x, t) dx \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (5.52)$$

Demostración. Siguiendo el mismo argumento que en la demostración del Lema 5.5.5 podemos probar que existe $\tau_1 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \infty \text{ uniformemente para } t \in (\tau_2, \tau_3),$$

donde $\tau_1/4 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_1$. Entonces, existe una bola $B_{r_0}(0) \subset \subset \Omega$ tal que $u_n \gg \bar{c}$ en $B_{r_0}(0) \times (\tau_2, \tau_3)$, donde elegimos $\bar{c} > \max\{1, \alpha - 1\}$ y satisfaciendo

$$\left((\alpha - 1)\bar{c}^{\alpha-1} - 4(\alpha - 1) \frac{\log(\bar{c})}{t_2 - t_1} \right) > \Lambda_{N,\gamma}.$$

Sea $\phi \in C_0^\infty(B_{r_0}(0))$. Por el la desigualdad de Picone, Teorema 2.2.2, resulta

$$\int_{B_{r_0}(0)} |\nabla \phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \int_{B_{r_0}(0)} \frac{-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n)}{u_n} \phi^2.$$

Por consiguiente, como en la prueba del Teorema 5.5.8 obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{r_0}(0)} |\nabla \psi|^2 |x|^{-2\gamma} dx &\geq \left((\alpha - 1)\bar{c}^{\alpha-1} - 4(\alpha - 1) \frac{\log(\bar{c})}{t_2 - t_1} \right) \int_{B_{r_0}(0)} \frac{|\psi|^p}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx \\ &> \Lambda_{N,\gamma} \int_{B_{r_0}(0)} \frac{|\psi|^p}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx, \end{aligned}$$

que es una contradicción con la optimalidad de la constante de Hardy-Sobolev $\Lambda_{N,\gamma}$. ■

Una vez más, por la desigualdad de Harnack débil, obtenemos el resultado principal de explosión completa.

Teorema 5.5.11 *Supongamos que u_n es la solución positiva minimal del problema (5.51) con $(\gamma + 1) > 0$, entonces para cualquier $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0, t_0) = \infty$.*

5.6 Existencia y no unicidad en el caso sublineal, $0 < \alpha < 1$

En el caso $0 < \alpha < 1$ se tiene el siguiente resultado de existencia.

Teorema 5.6.1 *Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$ una función positiva. Entonces el problema*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.53)$$

con $0 < \alpha < 1$, tiene una solución global, $u \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Demostración. La existencia de solución para t pequeño puede demostrarse fácilmente. Que la solución existe globalmente es consecuencia del siguiente cálculo elemental. Usando u como función test en (5.53) obtenemos que

$$\int_{\Omega} u^2(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma} dx dt = \int_{\Omega} u_0^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx dt.$$

Por las desigualdades Hölder y Young conseguimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n^2(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 |x|^{-2\gamma} dx dt \\ \leq \int_{\Omega} u_0^2 dx + \int_0^T \left(\int_{\Omega} \frac{dx}{|x|^{2(\gamma+1)}} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\int_{\Omega} \frac{u^2 dx}{|x|^{2(\gamma+1)}} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} dt \\ \leq \int_{\Omega} u_0^2 dx + \frac{\alpha+1}{2} \varepsilon^{\frac{\alpha+1}{2}} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx dt + c\varepsilon^{-\frac{1-\alpha}{2}} T. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hardy-Sobolev tenemos que

$$\int_{\Omega} u_n^2(x, T) dx + \left(1 - \Lambda_{N,\gamma}^{-1} \frac{\alpha+1}{2} \varepsilon^{\frac{\alpha+1}{2}} \right) \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 |x|^{-2\gamma} dx dt \leq c\varepsilon^{-\frac{1-\alpha}{2}} T + \int_{\Omega} u_0^2 dx$$

por tanto tomando ε suficientemente pequeño concluimos que la solución está definida en $[0, T]$ para T arbitrario. \blacksquare

Consideremos el problema estacionario,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla w) = \frac{w^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.54)$$

Sea w la única solución positiva (véase el Lema 2.4.3). En particular, w es una solución estacionaria del Problema (5.53) con $u_0 \equiv w$.

En el caso $u_0 \equiv 0$, $u \equiv 0$ es una solución. Como $\alpha < 1$, podemos demostrar un resultado similar al de H. Fujita en [66], es decir, tenemos el siguiente resultado de no unicidad.

Teorema 5.6.2 *Supongamos que ω es la única solución positiva del problema (5.54). Entonces el problema*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla u) = \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.55)$$

donde $\alpha < 1$, tiene solución positiva maximal, $u \not\equiv 0$ tal que $u \nearrow w$ en $\mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para demostrar el teorema anterior usaremos el siguiente resultado.

Lema 5.6.3 *Sea $v \in L^2((0, T); \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$ una subsolución positiva del problema (5.55), entonces $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v - w)_+^2 dx \leq 0$, es decir,*

$$\int_{\Omega} (v - w)_+^2 dx \leq \int_{\Omega} (v(0) - w)_+^2 dx \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Del hecho que v es subsolución obtenemos que

$$(v_t - w_t) - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla(v - w)) \leq \frac{v^\alpha - w^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}. \quad (5.56)$$

Usando $(v - w)_+$ como función test en (5.56) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v - w)_+^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(v - w)_+|^2 |x|^{-2\gamma} dx &\leq \int_{\Omega} \frac{(v^\alpha - w^\alpha)(v - w)_+}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx \\ &\leq \alpha \int_{\Omega} w^{\alpha-1} \frac{(v - w)_+^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.2.2 concluimos que

$$\int_{\Omega} |\nabla(v - w)_+|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \int_{\Omega} \frac{-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma}\nabla w)}{w} (v - w)_+^2 dx \geq \int_{\Omega} \frac{w^{\alpha-1}}{|x|^{2(\gamma+1)}} (v - w)_+^2 dx.$$

Por tanto $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v - w)_+^2 dx \leq 0$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.6.2: Sea w la única solución positiva del problema (5.54), como $u(x, 0) \equiv 0$, entonces w es una supersolución del problema (5.55). Tomando como iterante inicial $u_1 = w$, definimos por recurrencia u_{n+1} como la única solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_{n+1}) = \frac{u_n^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u_{n+1} \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t_0), \\ u_{n+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, t_0), \\ u_{n+1}(x, 0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.57)$$

Por comparación e inducción probamos que la sucesión $\{u_n\}$ satisface:

$$w = u_{(0)} \geq u_1 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots \geq 0 \quad \text{para todo } n.$$

Por consiguiente obtenemos de forma sencilla que la sucesión converge a u , solución débil del problema (5.55). En esta situación, es suficiente probar que $u \not\equiv 0$.

Definimos $w_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^{1-\alpha}((1-\alpha)t)^{1-\alpha}\phi$, donde $\varepsilon > 0$ es una constante a elegir y ϕ es la primera autofunción del Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \phi) &= \lambda_1 |x|^{-2\gamma} \phi \quad \text{en } \Omega, \\ \phi &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tal que $\|\phi\|_{L^\infty} = 1$. Entonces

$$\begin{cases} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla w_\varepsilon) = \left(\varepsilon^{\alpha+1} t + \varepsilon^{1-\alpha}((1-\alpha)t)^{1-\alpha} \right) \phi, \\ w_\varepsilon \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t_0), \quad w_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, t_0) \text{ y } w_\varepsilon(x, 0) = 0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Elijiendo ε tal que $w \geq w_\varepsilon$, podemos probar por inducción que $u_n \geq w_\varepsilon$ para cualquier n . Por consiguiente $u \geq w_\varepsilon > 0$. Notése que la maximalidad de u es consecuencia del Lema 5.6.3. En efecto, sea v otra solución del Problema (5.55), entonces por el Lema 5.6.3 concluimos que $v \leq w = u_1$, y usando un argumento de iteración, tenemos que $u_n \geq v$ para todo n . Por tanto, concluimos que $u \geq v$, lo que demuestra la maximalidad de u .

Sea $s > 0$, entonces podemos probar que $u(x, t) \leq u(x, t+s)$ para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$; por lo tanto, u es no decreciente con respecto a t en casi todo $x \in \Omega$. Tomando u como función test en (5.55) y usando la propiedad de crecimiento, obtenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2)_t dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |x|^{-2\gamma} dx = \int_{\Omega} \frac{u^{\alpha+1}}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx.$$

Por las desigualdades de Hölder y Hardy-Sobolev (véase (2.17)), deducimos que para todo $t > 0$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 |x|^{-2\gamma} dx \leq C(N, \gamma). \quad (5.58)$$

Por tanto obtenemos la existencia de una subsucesión $t_k \rightarrow \infty$ y $\bar{w} \in \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)$ tales que $u(\cdot, t_k) \rightarrow \bar{w}$ cuando $t_k \rightarrow \infty$ y $u(\cdot, t_k) \rightarrow \bar{w}$ en c.t.p. de Ω y en $L^r(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx)$ para todo $1 \leq r < 2_{\gamma}^*$. Como u es creciente en t , entonces tenemos la convergencia de toda la sucesión.

Para completar el resultado, identificamos el límite. Sea ξ_0 la solución del problema

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \xi_0) = 1 \text{ en } \Omega, \quad \xi_0|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.59)$$

Usando ξ_0 como función test en (5.55) y por el hecho que u es creciente en t y satisface (5.58) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, t) dx &\leq \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u(x, \tau) dx d\tau = \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u(-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \xi_0)) dx d\tau \\ &\leq \int_{\Omega} u(x, t) \xi_0 dx - \int_{\Omega} u(x, t+1) \xi_0 dx + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} \frac{u^{\alpha} \xi_0}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx d\tau \\ &\leq C(N, \gamma, \Omega). \end{aligned}$$

Por tanto $u(x, \cdot) \rightarrow \bar{w}(x)$ en $L^1(\Omega)$ y entonces

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} u(x, \tau) dx d\tau \rightarrow \int_{\Omega} \bar{w}(x) dx \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Sea $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$. Usando ϕ como función test en (5.55) obtenemos que

$$\left[\int_{\Omega} u(x, \tau) \phi(x) dx \right]_t^{t+1} + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u(-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \phi)) dx d\tau = \int_t^{t+1} \int_{\Omega} \frac{u^{\alpha} \phi}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx d\tau,$$

entonces cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\int_{\Omega} \bar{w}(-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \phi)) dx = \int_{\Omega} \frac{\bar{w}^{\alpha} \phi}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx.$$

De donde obtenemos que \bar{w} es una solución débil del problema (5.54), y por el resultado de unicidad para dicho problema resulta que $\bar{w} = w$. ■

En el caso $0 \leq u(x, 0) = u_0 \leq w$ obtenemos una monotonía adicional que nos permite probar el siguiente resultado.

Lema 5.6.4 Sea u una solución del problema (5.53) con $0 \leq u(x, 0) \leq w$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = w(x) \quad \text{en c.t.p. } x \in \Omega.$$

Demostración. Por el Lema 5.6.3, $u(x, t) \leq w(x)$ para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$. Usando $w(x)$ como función test en (5.53) y teniendo en cuenta que $0 < \alpha < 1$ y $u^\alpha w \geq uw^\alpha$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) w(x) dx + \int_{\Omega} \frac{uw^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx = \int_{\Omega} \frac{u^\alpha w}{|x|^{2(\gamma+1)}} w dx \geq \int_{\Omega} \frac{uw^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx.$$

Entonces

$$\int_{\Omega} u(x, t) w(x) dx \geq \int_{\Omega} u(x, 0) w(x) dx > 0.$$

Como consecuencia $u(x, t) \not\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, $0 \leq u(x, t) \leq w(x)$, entonces pasando a una subsucesión $u(x, t_k) \rightarrow w_1(x)$ cuando $t_k \rightarrow \infty$ donde w_1 es una solución del problema estacionario. Puesto que $\int_{\Omega} u(x, t) w(x) dx$ es creciente en t , por unicidad del límite tenemos que $u(x, t) \rightarrow w_1(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por fin usando el resultado de unicidad para el problema elíptico concluimos que $w_1 \equiv w$. ■

A continuación, describimos una función que permiti dar una condición suficiente de integrabilidad, en el dato inicial, para obtener existencia de solución (en la línea de Baras-Goldstein [19]).

Sea $g(x) \equiv |x|^{-\kappa_c}$ donde

$$\kappa_c = \frac{N - 2(\gamma + 1) - \sqrt{(N - 2(\gamma + 1))^2 - 4c}}{2}, \quad \text{donde } \lambda < c < \Lambda_{N, \gamma}.$$

Entonces si $\Omega \equiv B_1(0)$, g es una solución del problema

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla g) = c \frac{g}{|x|^{2(\gamma+1)}}, \quad g \geq 0 \text{ y } g|_{\partial\Omega} = 1.$$

Por tanto tenemos el siguiente resultado de existencia.

Teorema 5.6.5 Sea $u_0 \in L^1(\Omega)$ una función no negativa tal que $u_0 \not\equiv 0$. Supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones:

$$(1) \quad \alpha = 1, \quad \lambda < \Lambda_{N, \gamma} \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} u_0(x) g(x) dx < \infty,$$

$$(2) \gamma + 1 > 0, \quad 0 < \alpha < \alpha_1 = 1 - \frac{\gamma + 1}{N - (\gamma + 1)} \quad y \quad \lambda > 0,$$

$$(3) \gamma + 1 \leq 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad y \quad \lambda > 0,$$

entonces el problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \lambda \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega, \end{cases} \quad (5.60)$$

tiene una solución positiva en sentido débil.

Demostración. El primer caso se sigue usando el mismo argumento que en [19]. Por conveniencia para el lector, hacemos un resumen de esta prueba. Sea u_n la solución minimal del problema truncado

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n) = \lambda \frac{u_n}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u_n \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u_n(x, 0) = T_n(u_0(x)) \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (5.61)$$

Sea $\{p_\varepsilon\} \subset C^2(\mathbb{R})$ una sucesión de funciones convexas verificando $p_\varepsilon(0) = p'_\varepsilon(0) = 0$, la cual aproxima $|\cdot|$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Tomando $p'_\varepsilon(u_n)g(x)$ como función test en (5.61) y pasando al límite con $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\int_{\Omega} u_n(x, t)g(x)dx + (c - \lambda) \int_0^T \int_{\Omega} \frac{u_n g}{|x|^{2(\gamma+1)} + 1/n} dxdt \leq \int_{\Omega} T_n(u_0)\psi dx \leq \int_{\Omega} u_0(x)g(x)dx.$$

Como $\{u_n\}$ forma una sucesión creciente, usando el hecho que $g > 1$, obtenemos la existencia de $u(x, t)$ tal que

$$\int_{\Omega} u_n(x, t)gdx \nearrow \int_{\Omega} u(x, t)gdx < \infty$$

y

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{u_n(x, t)}{|x|^{2(\gamma+1)} + 1/n} dxdt \nearrow \int_0^T \int_{\Omega} \frac{u(x, t)}{|x|^{2(\gamma+1)}} dxdt < \infty.$$

Tomando $f(x, t) = \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y por un argumento de aproximación obtenemos el resultado deseado.

Para demostrar los otros casos suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\lambda = 1$. Definamos $u_n^0(x) = T_n(u_0(x))$. Sea u_n la solución minimal positiva del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n) = \frac{u_n^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u_n \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_n(x, 0) = u_n^0(x) \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.62)$$

Supongamos que $\gamma + 1 > 0$. Como $\alpha < \alpha_1$, obtenemos la existencia de $\beta > 0$ tal que

$$0 < \beta < 2(\gamma + 1) \quad \text{y} \quad 2(\gamma + 1) - \frac{\alpha\beta}{2} < N(1 - \alpha).$$

Sea ϕ la solución positiva del problema

$$-\operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla \phi) = \frac{1}{|x|^\beta}, \quad \phi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Entonces $\phi \in L^\infty(\Omega)$, véase el Capítulo 2. Usando ϕ como función test en (5.62), obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_n \phi dx + \int_{\Omega} \frac{u_n}{|x|^\beta} dx = \int_{\Omega} \frac{u_n^\alpha \phi}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx. \quad (5.63)$$

Por las desigualdades de Hölder y Hardy-Sobolev resulta que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_n \phi dx + \int_{\Omega} \frac{u_n}{|x|^\beta} dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} u_n \phi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{u_n}{|x|^\beta} dx + C(N, \gamma, \varepsilon).$$

Eliendo ε convenientemente pequeño concluimos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_n \phi dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} u_n \phi dx + C$$

y por el lema de Gronwall resulta

$$\int_{\Omega} u_n(x, t) \phi(x) dx \leq c_1 t + c_2 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} \frac{u_n}{|x|^\beta} dx < c_2 < \infty,$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas dependientes sólo de N , γ y $\int_{\Omega} u_0(x) dx$.

Así obtenemos la existencia de una función medible $u \geq 0$ tal que $u_n(x, t) \nearrow u(x, t)$ para cualquier $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$,

$$\int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^T \int_{\Omega} \frac{u(x, t)}{|x|^\beta} dx dt < \infty.$$

Sea $f_n(x, t) = \frac{u_n^\alpha(x, t)}{|x|^{2(\gamma+1)}}$, por las desigualdades de Hölder y Young obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega f_n(x, t) dx dt &\leq C(N, \gamma)T + \int_0^T \int_\Omega \frac{u_n(x, t)}{|x|^\beta} dx dt \\ &\leq C(N, \gamma)T + \int_0^T \int_\Omega \frac{u(x, t)}{|x|^\beta} dx dt < \infty. \end{aligned}$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada concluimos que

$$f_n(x, t) \nearrow f(x, t) = \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} \in L^1(\Omega \times (0, T)).$$

El resultado ahora sigue aplicando los mismos argumentos que en [26] y [109].

Si $\gamma + 1 \leq 0$, usando $T_k(u_n)$ como función test en (5.60), y recordando la definición de $\Theta_k(s)$ en (5.7), obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega \Theta_k(u_n) dx + \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 |x|^{-2\gamma} dx &= \int_\Omega \frac{T_k(u_n) u_n^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx \\ &\leq \int_\Omega T_k(u_n) u_n^\alpha dx \leq k^{1-\alpha} |\Omega|^{1-\alpha} \left(\int_\Omega T_k(u_n) u_n dx \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Como $\Theta_k(s) \geq \frac{1}{2} T_k(s)s$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \Theta_k(u_n) dx + \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 |x|^{-2\gamma} dx \leq 2^\alpha k^{1-\alpha} |\Omega|^{1-\alpha} \left(\int_\Omega \Theta_k(u_n) dx \right)^\alpha.$$

Siguiendo el argumento anterior, concluimos usando la desigualdad de Gronwall.

■

Capítulo 6

Problemas parabólicos lineales y cuasilineales con condiciones mixtas

6.1 Introducción

En este capítulo emprendemos principalmente el estudio de la no existencia y la explosión de soluciones del siguiente problema,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{u^\alpha}{|x|^{p(\gamma+1)}}, \quad u \geq 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{si } x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y suave con $0 \in \Omega$, $\alpha \geq p - 1$, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$ y recordemos que $\Delta_{p,\gamma}(\cdot) = \operatorname{div}(|x|^{-p\gamma} |\nabla(\cdot)|^{p-2} \nabla(\cdot))$. Las condiciones de contorno sobre $\partial\Omega \times (0, T)$ las definimos como en la parte elíptica:

$$B(u) = u\chi_{\Sigma_1} + |x|^{-p\gamma} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \chi_{\Sigma_2}, \quad (6.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_i \subset \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \text{ son subvariedades suaves de dimensión } N - 1, \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \quad \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 = \partial\Omega \text{ y } \overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2 = \Gamma, \text{ la interfase,} \\ \text{es una subvariedad suave de dimensión } N - 2. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Este capítulo es por un lado, la extensión del Capítulo 5 con $p = 2$ y condiciones Dirichlet a condiciones de contorno mixtas y por otro lado, la extensión de algunos resultados de [6] y [52] con condiciones Dirichlet y $p \neq 2$ al caso con condiciones mixtas.

Concretamente, el capítulo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 6.2 estudiamos el caso $p = 2$, $\alpha \geq 1$, que a su vez dividimos en tres subsecciones, según $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,p,\gamma}$, $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \neq \Lambda_{N,p,\gamma}$ ó $\alpha > 1$. Recordemos del Capítulo 3 que la constante de Hardy-Sobolev $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza si $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,p,\gamma}$. Este hecho ha sido demostrado por Wang-Zhu en [126] en el caso $p = 2$ y $\gamma = 0$ por técnicas Hilbertianas, y la extensión a $p > 1$, $-\infty < \gamma < \frac{N-p}{p}$ es el resultado del Teorema 3.5.2. Además, hemos establecido condiciones suficientes para que $\Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcance. Teniendo en cuenta estos hechos suponemos en la Subsección 6.2.1 que $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,2,\gamma}$, es decir, $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ no se alcanza siendo este el caso más sencillo, en el que las técnicas empleadas son las mismas que en el caso Dirichlet (véase la Subsección 5.5.1). En la Subsección 6.2.2, suponemos que $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \neq \Lambda_{N,2,\gamma}$, y por tanto, $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza; aquí las técnicas anteriores no son válidas para el intervalo $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \lambda \leq \Lambda_{N,2,\gamma}$. En este caso, seguimos las ideas de Goldstein-Zhang en el artículo reciente [77], en el que extienden el resultado de explosión de Baras-Goldstein, en [19], a ecuaciones parabólicas con coeficientes variables y potencial singular, utilizando una extensión del método empleado por Cabré-Martel en [39]. El caso $p = 2$, $\alpha > 1$ y $\lambda > 0$ lo estudiamos en la Subsección 6.2.3, donde obtenemos de manera inmediata la extensión de los resultados de la Subsección 5.5.2 a las condiciones mixtas. Obsérvese que no importa el hecho de si $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ se alcanza o no, porque la falta de homogeneidad en el espacio, hace que el comportamiento del problema sea independiente de $\lambda > 0$.

En la Sección 6.3 estudiamos la explosión en el caso cuasilineal $p > 2$ y $\alpha \geq p - 1$, que en función de α , la dividimos en dos subsecciones: en la Subsección 6.3.1 tratamos el Problema (6.1) con $p > 2$, $\alpha = p - 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$, donde siguiendo los argumentos de [52], también obtenemos un resultado incluso más fuerte que en el caso lineal $p = 2$. Precisamente, se obtiene que incluso el problema truncado explota en tiempo finito. La Subsección 6.3.2 la dedicamos a señalar cómo se obtiene la no existencia y explosión completa en el caso $p > 2$, $\alpha > p - 1$ y $\lambda > 0$, cuya demostración sigue las ideas mostradas en el capítulo anterior para $p = 2$ y condiciones Dirichlet. Los resultados con $p > 2$ y datos Dirichlet pueden verse en [6] y la demostración para condiciones mixtas es la misma.

La Sección 6.4, con la que se concluye la memoria, la dedicamos a demostrar algunos

resultados de existencia y a señalar como otros, con datos Dirichlet, se extienden a datos mixtos de manera inmediata. Finalmente damos referencia de algunos más también para datos Dirichlet, que en el caso mixto su extensión no es tan inmediata.

Concretamente, en la Subsección 6.4.1, señalamos que en el caso lineal $p = 2$ y $\alpha = 1$ (como en el capítulo anterior para datos Dirichlet) obtenemos existencia de solución global en cualquiera de las dos siguientes alternativas:

(1) $\lambda < \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ y $-\infty < \gamma < \frac{N-2}{2}$

ó

(2) $\lambda > 0$ y $(\gamma + 1) \leq 0$.

Además estudiamos una perturbación del Problema (6.1) con $p = 2$ y $(\gamma + 1) > 0$ (para el que hemos demostrado en la Sección 6.2 la explosión espectral instantánea y completa para $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$) en el que demostramos existencia global cuando añadimos un término de absorción, el cual hace que se “queme” la suficiente masa como para que no haya explosión. En la Subsección 6.4.2 señalamos que en el caso $1 < p < 2$ y $0 < (\gamma + 1) < \frac{N(2-p)}{2p}$ hay existencia de solución global. La demostración es idéntica al caso Dirichlet (véase [52] para más detalles). Finalmente, en la Subsección 6.4.3 apuntamos algunas ideas sobre existencia local cuando $(\gamma + 1) \leq 0$ y todo $p > 1$, basadas en el uso de una supersolución que sólo depende del tiempo. Para terminar, se señalan resultados relacionados con la existencia global y la extinción en tiempo finito cuando $1 < p < 2$ en el caso Dirichlet; de hecho en [52] donde se demuestra, en particular, que para el caso $\alpha = p - 1$ hay solución débil global para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para datos mixtos es aún desconocido. Esta es una línea de trabajo en progreso.

Publicación. Los resultados de este capítulo son esencialmente el contenido del artículo [2], en preparación.

6.2 Explosión en el caso $p = 2$, $\alpha \geq 1$, $(\gamma + 1) > 0$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{2,\gamma} u &= \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ B(u(x, t)) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.4)$$

En esta sección, probamos explosión para el Problema (6.4) en el caso en que $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$. Como vimos en el Capítulo 3 la constante $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ puede alcanzarse o no, dependiendo de si $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,2,\gamma} \equiv \left(\frac{N-2(\gamma+1)}{2}\right)^2$ ó $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,2,\gamma}$. Por este motivo, demostramos la explosión mediante un análisis diferente en cada caso.

Previamente, necesitamos extender el Lema de Hopf parabólico al operador lineal

$$\mathcal{L}_\gamma(u) = \frac{\partial}{\partial t}(u) - \Delta_{2,\gamma}(u).$$

Denotamos $E = \Omega \times (0, T)$, donde suponemos como siempre que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y suave con $0 \in \Omega$. Por claridad en la exposición hacemos la siguiente extensión del Lema de Hopf. (Véase el Teorema 6 en la pág. 174 de Protter-Weinberger,[110]).

Teorema 6.2.1 *Sean $0 < t_0 < T$ y $E_{t_0} = \{(x, t) \in E | t \leq t_0\}$. Supongamos que $\mathcal{L}_\gamma(u) \leq 0$, u es continuamente diferenciable en el punto $P = (x_0, t_0) \in \partial E_{t_0}$, $u(P) = M$ y $u(x, t) < M \forall (x, t) \in E_{t_0}$. Sea $B \subset E$ una bola centrada en (\tilde{x}, \tilde{t}) con $\tilde{x} \neq x_0$ y tangente a ∂E con $P \in \partial B$. Sea $B_{t_0} = B \cap E_{t_0}$. Si ν es un vector exterior a E_{t_0} en P , entonces*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \quad \text{en el punto } P.$$

Demostración. Construimos una bola B_1 centrada en P y de radio $r_1 = \frac{1}{2}r_0$, siendo $r_0 = |(x_0, t_0) - (\tilde{x}, \tilde{t})|$. Llamamos $C' = \partial B_1 \cap \overline{B_{t_1}}$ y $C'' = \overline{B_1} \cap E_{t_0}$. Las variedades C' , C'' y el conjunto $t = t_0$ forman la frontera de una región interior a ellos que llamamos R .

Reduciendo el radio de B si es necesario, podemos suponer que $(0, t) \notin D \forall t < T$ y además que $u < M$ sobre C'' excepto en P . Como $u < M$ en C' , tenemos las siguientes tres propiedades:

1. $u < M$ sobre C'' salvo en P .
2. $u(P) = M$.
3. Existe $\eta > 0$ suficientemente pequeño tal que (por compacidad) $u < M - \eta$ sobre C' .

Definamos la siguiente función auxiliar:

$$v(x, t) = e^{-\alpha[|x-\tilde{x}|^2+(t-\tilde{t})^2]} - e^{-\alpha r_0^2},$$

entonces por un cálculo explícito,

$$\mathcal{L}_\gamma(v) = 2\alpha e^{-\alpha(|x-\tilde{x}|^2+(t-\tilde{t})^2)} \left\{ |x|^{-2\gamma} [1 - 2\alpha|x - \tilde{x}|^2] + 2\gamma|x|^{-2(\gamma+1)} \langle x, x - \tilde{x} \rangle - (t - \tilde{t}) \right\}.$$

Además, para α suficientemente grande se concluye que $\mathcal{L}_\gamma(v) < 0$ sobre \bar{R} . Definamos la función $w = u + \varepsilon v$, con $\varepsilon > 0$, entonces $\mathcal{L}_\gamma(w) = \mathcal{L}_\gamma(u) + \varepsilon \mathcal{L}_\gamma(v)$ en R . Por la propiedad 3, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que $w < M$ sobre C' . Como $v = 0$ sobre ∂D , por 1 tenemos que $w < M$ sobre C'' excepto en P , donde $w(P) = M$. Por el Principio del Máximo en R , w lo alcanza en ∂R , y de hecho, sólomente en P . Por tanto,

$$0 \leq \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}. \quad (6.5)$$

Tomando \tilde{x} como el origen de coordenadas en nuestro sistema siendo $n = \frac{1}{r_0}(\tilde{x} - x_0, \tilde{t} - t_0)$ tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \langle \nu, \frac{\partial v}{\partial n} \rangle = -2\alpha r_0 e^{-\alpha r_0^2} \langle \nu, n \rangle < 0. \quad (6.6)$$

Entonces, enlazando (6.5) y (6.6) concluimos el resultado:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \quad \text{en } P.$$

■

6.2.1 Explosión para $\alpha = 1$, $(\gamma + 1) > 0$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,2,\gamma}$

En esta subsección suponemos que $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,2,\gamma}$ y por lo tanto, la constante $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,\gamma}$ no se alcanza. Las ideas que seguiremos son similares a las presentadas en la Subsección 5.5.1 en la que demostramos la explosión con datos Dirichlet.

Teorema 6.2.2 *Supongamos que $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}$. Sea el dato inicial $\varphi \in L^1(\Omega)$ una función positiva. Entonces si $\varphi \neq 0$, el Problema (6.4) no tiene solución positiva en el sentido de entropía.*

Demostración. Supongamos que (6.4) tiene solución $u(x, t)$, en particular, es una supersolución del Problema (5.30), por tanto, siguiendo las ideas de la demostración del Teorema 5.5.1, llegamos a contradicción con la optimalidad de $\Lambda_{N,2,\gamma}$, lo que demuestra el resultado.

■

Como consecuencia al igual que con datos Dirichlet, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.2.3 Sea $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}$. Si $\varphi \equiv 0$, entonces la única solución de entropía no negativa de (6.4) es $u \equiv 0$.

Siguiendo la filosofía de los Teoremas 6.2.2 y 5.5.1 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.2.4 Supongamos que $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $\varphi \in L^1(\Omega)$ son funciones no negativas tales que $(f, \varphi) \neq (0, 0)$. Entonces el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{2,\gamma} u = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} + f, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.7)$$

no tiene solución de entropía positiva para $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}$.

Antes de demostrar el resultado de explosión completa, observamos que tenemos el resultado análogo al Lema 5.5.10.

Lema 6.2.5 Sea u_n la única solución positiva del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_{2,\gamma} u_n = a_n(x) g_n(u_n) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n \geq 0 & \text{en } \Omega, \quad B(u_n) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ u_n(0, x) = \varphi(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (6.8)$$

donde $a_n(x)$, $g_n(s)$ están definidas por (5.31) y (5.32). Sea $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ y $\varphi \not\equiv 0$. Entonces para cualquier $r > 0$ tal que $B_{4r}(0) \subset \Omega$ y para todo $t \in (0, T)$ resulta

$$\int_{B_r} u_n(x, t) dx \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

La prueba se obtiene por comparación con la solución del Problema (5.51).

Ahora formulamos el resultado de explosión completa.

Teorema 6.2.6 Sea u_n la solución positiva del problema (6.8), entonces para todo punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0, t_0) = \infty$.

La demostración de este resultado es la misma que la del Teorema 5.5.6.

6.2.2 Explosión para $\alpha = 1$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \neq \Lambda_{N,2,\gamma}$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{2,\gamma} u = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.10)$$

donde $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \neq \Lambda_{N,2,\gamma}$. En esta subsección probamos no existencia al igual que en la anterior, pero los métodos han de ser diferentes, puesto que antes teníamos $\Lambda_{N,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) = \Lambda_{N,\gamma}$. Este hecho hacía que las técnicas utilizadas en el Capítulo 5 fuesen válidas, puesto que la no existencia de solución se basaba en la comparación con la constante de Hardy con datos Dirichlet, $\Lambda_{N,2,\gamma}$.

Las ideas que utilizamos en este nuevo caso, se basan en un artículo reciente de Goldstein-Zhang, [77], en el que usando un método de Cabré-Martel en [39], extienden los resultados de Baras-Goldstein, en [19], a ecuaciones parabólicas con coeficientes variables y con condiciones casi optimales sobre los potenciales singulares (para condiciones Dirichlet).

Concretamente, demostramos el siguiente resultado de no existencia.

Teorema 6.2.7 *Supongamos que $u_0(x)$ es una función positiva no trivial tal que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $1 + \gamma > 0$, entonces el Problema (6.10) no tiene solución positiva en el sentido que si u es solución del Problema (6.10), tenemos $u(x, t) = \infty$ para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$.*

Para demostrar el Teorema 6.2.7 utilizaremos los siguientes lemas. En primer lugar, siguiendo las ideas de usadas en [97] y en [32] tenemos el siguiente lema.

Lema 6.2.8 *Denotemos $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ y supongamos que $u_0(x)$ es una función positiva tal que $u_0(x)d(x) \in L^1(\Omega)$. Sea h la solución positiva del problema*

$$\begin{cases} h_t - \Delta_{2,\gamma} h = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ h(x, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ h(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.11)$$

Entonces para todo $t > 0$ existen dos constantes positivas $c_1(t)$ y $c_2(t)$ tales que

$$c_1(t)\|u_0 d\|_{L^1} d(x) \leq h(x, t) \leq c_2(t)\|u_0 d\|_{L^1} d(x). \quad (6.12)$$

Antes de demostrar este resultado, recordamos algunos detalles de la teoría de semigrupos que utilizaremos. Dado el problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta_{2,\gamma} v &= 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ v(x, t) &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ v(x, 0) &= \phi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.13)$$

entonces escribiendo $Au = \Delta_{2,\gamma} u$ si $u \in \mathcal{D}_{0,\gamma}^{1,2}(\Omega)$, tomamos $H = L^2(\Omega, |x|^{-2\gamma} dx) = L_\gamma^2(\Omega)$, el dominio de A está dado por $D(A) = \{u \in H \mid \Delta_{2,\gamma} u \in H, u|_{\partial\Omega} = 0\}$. El operador A satisface que:

1. Es disipativo, en efecto,

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\Omega} (\Delta_{2,\gamma} u) u dx = - \int_{\Omega} |x|^{-2\gamma} |\nabla u|^2 dx \leq 0$$

2. A es maximal, es decir, dada una función $f \in H$, existe una función $u \in D(A)$ tal que $-\Delta_{2,\gamma} u + u = f$.

Este último hecho es una consecuencia del Teorema de Lax-Milgram, que además da existencia de una única solución u . Por tanto, por el Teorema de Hille-Yosida, dado que $(A, D(A))$ es un operador maximal-disipativo en el espacio de Hilbert H , establece la existencia de una única solución del Problema (6.13), que en la notación de la teoría de semigrupos, se denota por $v(x, t) = S(t)\phi(x)$, $t \geq 0$, siendo $S(t) : H \rightarrow H$ el semigrupo asociado, que es lineal y verifica:

- (i) $S(0)\phi = \phi$, $\forall \phi \in H$.
- (ii) $S(t+s)\phi = S(t)S(s)\phi$, $\forall s, t > 0$, $\phi \in H$.
- (iii) La aplicación que a cada $t \geq 0$ le asocia $S(t)\phi$ es continua de $[0, \infty)$ en H .

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6.2.8: Comenzamos probando la estimación superior. Para ello, usando la notación anterior escribimos $v(x, s) \equiv S(s)\phi$ la solución del Problema (6.13). Entonces tenemos $h(x, t) \equiv S(t)u_0$. Teniendo en cuenta que $\gamma + 1 > 0$ y el Lema de Hopf establecido en el Teorema 6.2.1, junto con la compacidad de $\partial\Omega$, obtenemos:

$$\left\| d^{-1} S\left(\frac{s}{3}\right) \chi_{\Omega} \right\|_{\infty} \leq c(s). \quad (6.14)$$

Por la propiedad (ii) del semigrupo obtenemos que

$$\|d^{-1}S(s)u_0\|_\infty = \left\| d^{-1}S\left(\frac{s}{3}\right) \left[S\left(\frac{2s}{3}\right) u_0 \right] \right\|_\infty \leq c(s) \left\| S\left(\frac{2s}{3}\right) u_0 \right\|_\infty. \quad (6.15)$$

De nuevo por la propiedad (ii) resulta que

$$\left\| S\left(\frac{2s}{3}\right) u_0 \right\|_\infty = \left\| S\left(\frac{s}{3}\right) S\left(\frac{s}{3}\right) u_0 \right\|_\infty \leq C(s) \left\| S\left(\frac{s}{3}\right) u_0 \right\|_1.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \left\| S\left(\frac{s}{3}\right) u_0 \right\|_1 &= \int_\Omega u_0(x) S\left(\frac{s}{3}\right) \chi_\Omega dx \\ &\leq \|u_0 d\|_1 \left\| d^{-1}S\left(\frac{s}{3}\right) \chi_\Omega \right\|_\infty \leq c(s) \|u_0 d\|_1, \end{aligned} \quad (6.16)$$

de donde concluimos la estimación superior.

Ahora, demostramos la estimación inferior en (6.12). Sea ξ la solución positiva del problema

$$\begin{cases} \xi_t - \Delta_{2,\gamma} \xi = g & \text{en } \Omega \times (0, t), \\ \xi(x, s) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \xi(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.17)$$

donde g es una función positiva y acotada que elegiremos más adelante. Por el Lema de Hopf (Teorema 6.2.1) existe $c(t) > 0$ tal que $\xi(x, t) \geq c(t)d(x)$ para todo $x \in \Omega$. Tomemos $\xi_1(x, s) = \xi(x, t - s)$, entonces usando ξ_1 como función test en (6.11) obtenemos:

$$- \int_\Omega \xi(x, t) u_0(x) dx + \int_0^t \int_\Omega h(x, s) g(x, s) dx ds = 0.$$

Escogiendo $g = \chi_{B_r(x_0)} \chi_{(t-\frac{1}{2}\beta, t-\frac{1}{4}\beta)}$, con $(t - \frac{1}{2}\beta, t - \frac{1}{4}\beta) \subset (0, T)$, concluimos que

$$\int \int_{R^-} h(x, s) dx ds \geq c(t) \int_\Omega u_0(x) d(x) dx \quad (6.18)$$

donde $R^- \equiv B_r(x_0) \times (t - \frac{1}{2}\beta, t - \frac{1}{4}\beta)$. Por tanto, por la desigualdad de Harnack, Teorema 5.2.2, resulta:

$$h(x_0, t) \geq c(t) \|u_0 d\|_1.$$

Fijemos un compacto $K_1 \subset \subset \Omega$. En particular, existe $\eta > 0$ tal que $\text{dist}(K_1, \partial\Omega) = \eta$. Sea $x_0 \in K_1$. Entonces existe una constante $C(\eta) > 0$ tal que

$$h(x, t) \geq c(t) C(\eta) \|u_0 d\|_1 d(x), \quad \forall x \in K_1. \quad (6.19)$$

Tomemos un nuevo compacto K_0 , tal que $K_0 \subset\subset K_1 \subset\subset \Omega$, con $\text{dist}(K_0, \partial K_1) = \eta/2$. Sea $w(x, t)$ la solución del problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta_{2,\gamma} w &= 0 & \text{en } (\Omega \setminus K_0) \times (0, t), \\ w|_{\partial\Omega}(x, s) &= w|_{\partial K_0}(x, s) = 0 \\ w(x, 0) &= \frac{u_0}{\overline{C}} & x \in (\Omega \setminus K_0), \end{cases} \quad (6.20)$$

donde $\overline{C} = C(\eta)\|u_0 d\|_1$. Como $\gamma + 1 > 0$, entonces $w > 0$ y una vez más por el Lema de Hopf (Teorema 6.2.1) concluimos que $w(x, t) \geq c(t)d_{K_0}(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus K_0$, donde ahora $d_{K_0}(x)$ denota la mínima distancia de x a $\partial\Omega \cup \partial K_0$. En esta situación no es difícil ver que $\frac{h(x, t)}{\overline{C}}$ es una supersolución para el Problema (6.20). Por tanto obtenemos:

$$\frac{h(x, t)}{\overline{C}} \geq w(x, t) \geq c(t)d_{K_0}(x) \quad \text{para } x \in \Omega \setminus K_0. \quad (6.21)$$

Obsérvese que esta desigualdad se satiface, en particular, en $\Omega \setminus K_1$. Finalmente, usando (6.19) en K_1 y (6.21) en $\Omega \setminus K_1$ obtenemos la estimación inferior en (6.12) y concluimos. ■

Los dos lemas siguientes están inspirado en las ideas de Goldstein-Zhang en [77].

Lema 6.2.9 *Sea*

$$I(\lambda) := \inf_{\substack{\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \\ \phi|_{\Sigma_1} = 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}. \quad (6.22)$$

Entonces si $\Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) < \Lambda_{N,2,\gamma}$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$ tenemos que $I(\lambda) = -\infty$.

Demostración. Sea $k > 0$ y definamos

$$I(\lambda, k) = \inf_{\substack{\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \\ \phi|_{\Sigma_1} = 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{|x|^{2(\gamma+1)} + (\frac{1}{k})^2} dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}. \quad (6.23)$$

Entonces $I(\lambda, k) \searrow I(\lambda)$ cuando $k \rightarrow \infty$. Teniendo en cuenta que $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma)$, obtenemos que existen ϕ_0 y $c(k_0, \lambda, \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma))$ tales que

$$-\int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 |x|^{-2\gamma} dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{\phi_0^2}{|x|^{2(\gamma+1)} + (\frac{1}{k})^2} dx \geq c \int_{\Omega} \frac{\phi_0^2}{|x|^{2(\gamma+1)} + (\frac{1}{k})^2} dx, \quad \forall k \geq k_0. \quad (6.24)$$

Denotemos $\phi_k(z) = \phi_0(kz)$, entonces por la desigualdad (6.24) y con $\Omega_k = \frac{1}{k}\Omega$ obtenemos:

$$-\int_{\Omega_k} |\nabla \phi_k|^2 |z|^{-2\gamma} dz + \lambda \int_{\Omega_k} \frac{\phi_k^2}{|z|^{2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}} dz \geq c \int_{\Omega_k} \frac{\phi_k^2}{|z|^{2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}} dz. \quad (6.25)$$

Por tanto concluimos que

$$\begin{aligned} I(\lambda, k) &\leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi_0|^2 |x|^{-2\gamma} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{\phi_0^2}{|x|^{2(\gamma+1)} + (\frac{1}{k})^2} dx}{\int_{\Omega} \phi_0^2 dx} \\ &= \frac{k^{2(\gamma+1)} \int_{\Omega_k} |\nabla \phi_k|^2 |z|^{-2\gamma} dz - \lambda \int_{\Omega_k} \frac{\phi_k^2}{|z|^{2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}} dz}{\int_{\Omega_k} \phi_k^2 dz} \\ &\leq -c(k_0) k^{2(\gamma+1)} \frac{\int_{\Omega_k} \frac{\phi_k^2}{|z|^{2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}} dz}{\int_{\Omega_k} \phi_k^2 dz}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sea d el diámetro de Ω , teniendo en cuenta que $0 \in \Omega$, $\Omega_k = \frac{1}{k}\Omega$ y $\gamma + 1 > 0$ resulta que para todo $z \in \Omega_k$ se verifica $|z|^{2(\gamma+1)} < d^{2(\gamma+1)} k^{-2(\gamma+1)}$, por tanto,

$$k^{2(\gamma+1)} \frac{\int_{\Omega_k} \frac{\phi_k^2}{|z|^{2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}} dz}{\int_{\Omega_k} \phi_k^2 dz} \geq \frac{k^{2(\gamma+1)}}{d^{2(\gamma+1)} k^{-2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}}. \quad (6.27)$$

Teniendo en cuenta que $0 < \gamma + 1 < \frac{N-2}{2}$, tenemos dos posibilidades:

i) Si $0 \leq \gamma$ entonces

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \frac{k^{2\gamma}}{d^{2(\gamma+1)} k^{-2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}} \geq \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0. \quad (6.28)$$

ii) Si $-1 < \gamma < 0$, sea $0 < \rho < 1$ tal que $\gamma = \rho - 1$, entonces,

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \frac{k^{2(\gamma+1)}}{d^{2(\gamma+1)} k^{-2(\gamma+1)} + k^{2\gamma}} \geq \frac{k^{2\rho}}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_1. \quad (6.29)$$

Entonces si $0 \leq \gamma$, enlazando las desigualdades (6.26), (6.27) y (6.28) obtenemos:

$$I(\lambda, k) \leq -c_0(k_0) \frac{k^2}{2} \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty, \quad (6.30)$$

análogamente, si $-1 < \gamma < 0$, por las desigualdades (6.26), (6.27) y (6.29) tenemos que

$$I(\lambda, k) \leq -c_0(k_0) \frac{k^{2\rho}}{2} \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \quad (6.31)$$

Finalmente, como consecuencia de (6.30) y (6.31) resulta $I(\lambda) = -\infty$. ■

Lema 6.2.10 *Sea $q(x)$ una función continua en Ω tal que $q(x) > 0$ en Ω y $\log(q(x)) \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$ y supongamos que u solución positiva de (6.10). Si $u(x, t_1)q(x) \in L^1(\Omega)$ para algún $t_1 > 0$, entonces $\log(u(x, t_1)q(x)) \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$.*

Demostración. Definamos $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$, entonces por un argumento de aproximación, la desigualdad de Harnack y por la desigualdad de Jensen obtenemos que $\log(u(x, t_1)q(x)) \in L^p(\Omega_\delta)$ para todo $p \geq 1$.

Tomemos

$$\Omega \setminus \Omega_\delta = \{x \in \Omega \setminus \Omega_\delta : u(x, t_1)q(x) \geq 1\} \cup \{x \in \Omega \setminus \Omega_\delta : u(x, t_1)q(x) < 1\} \equiv \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Como en Ω_1 se verifica $u(x, t_1)q(x) \geq 1$ y $u(x, t_1)q(x) \in L^1(\Omega)$, entonces $\log(u(x, t_1)q(x)) \in L^p(\Omega_1)$ para todo $p \geq 1$. Por otro lado, si $h(x, t)$ es la solución del Problema (6.11) entonces $u(x, t)$ es una supersolución de (6.11) y por el lema de comparación, Lema 5.1.7, tenemos que $u(x, t_1) \geq h(x, t_1)$. De esta manera, si $x \in \Omega_2$ obtenemos,

$$1 > q(x)u(x, t_1) \geq q(x)h(x, t_1).$$

Como consecuencia:

$$|\log(u(x, t_1)q(x))| \leq |\log(q(x))| + |\log(h(x, t_1))|.$$

Por el Lema de Hopf, Teorema 6.2.1, tenemos que existe una constante positiva $C(t_1)$ tal que $h(x, t_1) \geq C(t_1)d(x, \partial\Omega)$. Finalmente, concluimos que $\log(h(x, t_1)) \in L^p(\Omega_2)$ para todo $p \geq 1$ y por tanto, $\log(u(x, t_1)q(x)) \in L^p(\Omega_2)$ para todo $p \geq 1$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.2.7: Supongamos por contradicción que el Problema (6.10) tiene solución positiva u , tal que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx dt < \infty.$$

Etapla 1: Sea $q(x)$ en las hipótesis del Lema 6.2.10, entonces existe a lo sumo un punto $t_1 \in (0, T)$ tal que $u(\cdot, t_1)q(\cdot) \in L^1(\Omega)$. En efecto, supongamos que no es así, es decir, existen t_1, t_2 con $0 < t_1 < t_2 < T$ tales que

$$u(\cdot, t_i)q(\cdot) \in L^1(\Omega) \text{ para } i = 1, 2.$$

Por el Lema 6.2.10 resulta que $\log(u(x, t_i)q(x)) \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$, $i = 1, 2$. Sea $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $\phi|_{\Sigma_1} = 0$, entonces usando la Identidad de Picone, ver el Teorema 2.2.2, obtenemos:

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx \geq \lambda \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{\Omega} \log \left(\frac{u(x, t_2)}{u(x, t_1)} \right) \phi^2 dx. \quad (6.32)$$

Como

$$\log \left(\frac{u(\cdot, t_2)}{u(\cdot, t_1)} \right) = \log(u(\cdot, t_2)q(\cdot)) - \log(u(\cdot, t_1)q(\cdot)) \in L^p(\Omega) \text{ para cada } p > 1,$$

entonces, $\log \left(\frac{u(\cdot, t_2)}{u(\cdot, t_1)} \right) \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$, en particular para $p > \max \left\{ \frac{N-2\gamma}{2}, \frac{N}{2} \right\}$.

Sea $v(x) = \frac{1}{t_2 - t_1} \log \left(\frac{u(x, t_2)}{u(x, t_1)} \right)$, aplicando la desigualdad puntual

$$s \leq \varepsilon s^{1+\eta} + c(\varepsilon) \quad \forall s \geq 0, \eta > 0$$

y las desigualdades de Hölder y Sobolev, tenemos que existen $\varepsilon > 0$ y $C \equiv C(\varepsilon, t_1, t_2, u) > 0$ tales que

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{\Omega} \log \left(\frac{u(x, t_2)}{u(x, t_1)} \right) \phi^2 dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx + C \int_{\Omega} \phi^2(x) dx, \quad (6.33)$$

entonces usando (6.32) concluimos que para $\tilde{C} = \frac{C}{1+\varepsilon}$,

$$I(\lambda, \varepsilon) := \inf_{\substack{\phi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \\ \phi|_{\Sigma_1} = 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 |x|^{-2\gamma} dx - \frac{\lambda}{1+\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx} \geq -\tilde{C} > -\infty. \quad (6.34)$$

Teniendo en cuenta que $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$, existe $\varepsilon > 0$ pequeño tal que $\frac{\lambda}{1+\varepsilon} > \Lambda_{N,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$. De esta manera, por el Lema 6.2.9 resulta que $I(\lambda, \varepsilon) = -\infty$, que es una contradicción con (6.34). Por tanto, $u(\cdot, t)q(\cdot) \in L^1(\Omega)$ a lo más en un $t = t_1$. Esto finaliza la primera etapa.

Etapla 2: Demostramos en esta etapa que dado $0 < t < T$, ha de existir $0 < s \leq t/2$ tal que para $x \in \Omega$ y $q(x) = c(t)d(x)$ se tiene $u(\cdot, s)q(\cdot) \in L^1(\Omega)$. En efecto, $q(x) = c(t)d(x)$ satisface las hipótesis del Lema 6.2.10, es decir, $q(x)$ es continua y positiva en Ω , $\log(q(x)) \in L^p(\Omega) \forall p \geq 1$. Además, si no existiese $s \in (0, t/2]$ tal que $u(\cdot, s)q(\cdot) \in L^1(\Omega)$, como $u(x, t) \geq \bar{h}(x, t)$, siendo \bar{h} la solución del problema

$$\begin{cases} \bar{h}_t - \Delta_{2,\gamma} \bar{h} = 0 & \text{en } \Omega \times (\frac{t}{2}, t), \\ \bar{h}(x, s) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (\frac{t}{2}, t), \\ \bar{h}(x, \frac{t}{2}) = u(x, \frac{t}{2}), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.35)$$

entonces por el Lema 6.2.8, para la constante positiva $c(t)$ obtenida por el Lema de Hopf

$$\bar{h}(x, t) \geq c(t) \left\| u\left(\cdot, \frac{t}{2}\right) d(\cdot) \right\|_{L^1} = c(t) \left\| u\left(\cdot, \frac{t}{2}\right) q(\cdot) \right\|_{L^1} = \infty,$$

por tanto, $u(x, t) = \infty$.

Etapla 3: No existe $0 < s \leq t/2$ tal que $q(\cdot)u(\cdot, s) \in L^1(\Omega)$.

En efecto, supongamos por contradicción que existe un único punto $s_0 \in (0, t/2]$, tal que $q(\cdot)u(\cdot, s_0) \in L^1(\Omega)$, entonces

$$u(x, (t + s_0)/2) \geq h_1(x, (t + s_0)/2),$$

siendo h_1 la solución del problema

$$\begin{cases} (h_1)_t - \Delta_{2,\gamma} h_1 = 0 & \text{en } \Omega \times (\frac{s_0}{2}, t), \\ h_1(x, s) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (\frac{s_0}{2}, t), \\ h_1(x, \frac{s_0}{2}) = u(x, \frac{s_0}{2}) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.36)$$

Como antes, usando el Lema 6.2.8 tenemos que existe una constante positiva $c(t)$ tal que

$$h_1(x, (t + s_0)/2) \geq c(t) \left\| u\left(\cdot, \frac{s_0}{2}\right) d(\cdot) \right\|_{L^1} d(x) = \left\| u\left(\cdot, \frac{s_0}{2}\right) q(\cdot) \right\|_{L^1} d(x) = \infty$$

por definición de s_0 , de donde concluimos que $u(x, (t + s_0)/2) = \infty$.

Etapla 4: Finalmente demostramos que u explota en todo punto.

Aplicando la desigualdad de Harnack (Teorema 5.2.1) a h_1 , existen $0 < \delta \ll 1$ y constantes positiva c , r tales que $h_1(z, (t + \delta)/2) \geq Ch_1(x, t/2)$ donde $z \in B(x, r) \subset \Omega$. Además C , r y δ son independientes de x y z (véase [45] para más detalles). Por tanto, para $z \in B(x, r) \subset \Omega$ tenemos:

$$\begin{aligned} u\left(z, \frac{t + s_0 + \delta}{2}\right) &\geq h_1\left(z, \frac{t + s_0 + \delta}{2}\right) \\ &\geq Ch_1\left(x, \frac{t + s_0}{2}\right) \geq C \left\| u\left(\cdot, \frac{s_0}{2}\right) q(\cdot) \right\|_{L^1} d(x) = \infty. \end{aligned}$$

Denotemos por h_2 la solución del problema

$$\begin{cases} (h_2)_t - \Delta_{2,\gamma} h_2 = 0 & \text{en } \Omega \times ((t + s_0 + \delta)/2, t), \\ h(x, s) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times ((t + s_0 + \delta)/2, t), \\ h(x, (t + s_0 + \delta)/2) = u(x, (t + s_0 + \delta)/2), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.37)$$

Entonces se verifica:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\geq h_2(x, t) \geq C(t) \int_{\Omega} u\left(z, \frac{t + s_0 + \delta}{2}\right) d(z) dz \\ &\geq \int_{|z-x| \leq r} u\left(z, \frac{t + s_0 + \delta}{2}\right) d(z) dz = \infty. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que (x, t) es arbitrario concluimos. ■

Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado de explosión completa.

Teorema 6.2.11 *Sea u_n la única solución del problema*

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} - \Delta_{2,\gamma} u_n = \lambda a_n(x) u_n & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ B(u_n) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_n(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.38)$$

donde $\lambda > \Lambda_{N,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $a_n(x) = \min\left\{n, \frac{1}{|x|^{2(\gamma+1)}}\right\}$. Entonces para todo $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ tenemos que $u_n(x, t) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

6.2.3 Explosión en el caso $\alpha > 1$ y $\lambda > 0$

En esta sección consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{2,\gamma} u = \lambda \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.39)$$

donde $\alpha > 1$. El comportamiento del problema es ahora diferente debido a la no homogeneidad en la ecuación, es decir, es independiente de λ . Por tanto, mediante un reescale, suponemos $\lambda = 1$.

Teorema 6.2.12 *Sea $\varphi \geq 0$ con $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ y $\varphi \not\equiv 0$. Entonces el Problema (6.39) no tiene solución positiva de entropía. Además si $\varphi \equiv 0$, la única solución no negativa es $u \equiv 0$.*

La demostración sigue las mismas ideas que la del Teorema 5.5.8, el hecho es que el resultado es independiente de λ . Es más, la demostración del Teorema 5.5.8 es de carácter local, es decir, no influyen las condiciones de contorno y por tanto se pueden repetir los mismos cálculos.

De manera inmediata se tiene el siguiente resultado.

Corolario 6.2.13 *Sean $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$ dos funciones positivas tales que $(f, u_0) \not\equiv (0, 0)$. Entonces el problema*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u) = \frac{u^\alpha}{|x|^{2(\gamma+1)}} + f, \quad u \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (6.40)$$

no tiene solución de entropía positiva.

Lema 6.2.14 *Sea u_n la solución del problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^{-2\gamma} \nabla u_n) = a_n(x) g_n(u_n) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u_n \geq 0 & \text{en } \Omega, \quad B(u_n) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u_n(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (6.41)$$

Entonces para todo $r > 0$ tal que $B_{4r}(0) \subset \Omega$ y todo $t \in (0, T)$:

$$\int_{B_r} u_n(x, t) dx \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (6.42)$$

La demostración sigue las ideas de la prueba del Lema 5.5.10 y el Teorema 5.5.8.

Ahora, teniendo en cuenta el Lema 6.2.14 y utilizando la desigualdad de Harnack débil establecida en el Teorema 5.2.2, se obtiene el resultado principal de explosión completa.

Teorema 6.2.15 *Supongamos que u_n es la solución positiva del problema (6.41), entonces para cualquier $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0, t_0) = \infty$.*

6.3 Explosión en el caso $p > 2$, $\alpha \geq p - 1$, $(\gamma + 1) > 0$

En esta sección estudiamos el siguiente problema,

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{u^\alpha}{|x|^{p(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

donde suponemos que $\alpha \geq p - 1$. En función del crecimiento $\alpha = p - 1$ ó $\alpha > p - 1$ dividimos el estudio del problema anterior en dos subsecciones.

6.3.1 Explosión en el caso $p > 2$, $\alpha = p - 1$, $(\gamma + 1) > 0$ y $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$

El problema a estudiar en esta sección es el siguiente,

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^{p(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.43)$$

A lo largo de esta subsección utilizaremos las siguientes hipótesis:

(H₁) $p > 2$, $0 < \gamma + 1 < \frac{N}{p}$, $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$.

(H₂) $\varphi \in L^\infty$ tal que $\exists \rho, \delta > 0$ con $\varphi(x) > \delta$, $\forall x \in B_\rho(0)$, $\varphi(x) \geq 0$.

En este caso, $p > 2$, se obtiene un resultado más fuerte que el obtenido en el caso lineal. Concretamente, incluso el problema con el potencial truncado explota en tiempo finito. De hecho para la ecuación

$$u_t - \Delta_{p,\gamma} u = 0 \quad (6.44)$$

y por cálculo directo, podemos comprobar que tenemos las soluciones de tipo Barenblatt, precisamente,

$$B(x, t) = t^{-N\beta(N, p, \gamma)} \left[M - \frac{(p-2)\beta(N, p, \gamma)^{\frac{1}{p-1}}}{p(\gamma+1)} \xi^{\frac{p(\gamma+1)}{p-1}} \right]_+^{\frac{p-2}{p-1}} \quad (6.45)$$

donde M es una constante positiva arbitraria,

$$\beta(N, p, \gamma) = \frac{1}{N(p-2) + p(\gamma+1)} \quad \text{y} \quad \xi = \frac{|x|}{t^{\beta(N, p, \gamma)}}.$$

Este hecho podría entenderse como una clase de velocidad de propagación finita para la ecuación (6.44). La dificultad es que la ecuación (6.44) con $\gamma \neq 0$ no es invariante por traslaciones espaciales, y entonces las correspondientes funciones de Barenblatt trasladadas no son solución de la ecuación. Sin embargo, la falta de homogeneidad de la ecuación da la siguiente desigualdad de Harnack débil.

Lema 6.3.1 *Sea u una solución no negativa de (6.44) en sentido débil, supongamos que en el punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ tenemos $u(x_0, t_0) > 0$, entonces existe una constante $B(N, p, \gamma) > 1$ tal que para todo $\theta, r > 0$ con*

$$Q_{4r}(\theta) \equiv B_{4r}(x_0) \times (t_0 - \theta, t_0 + \theta) \subset \Omega \times (0, T)$$

se verifica,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(x, t_0) dx \\ & \leq B \left[\left(\frac{r^{p(\gamma+1)}}{\theta} \right)^{\frac{1}{p-2}} + \left(\frac{\theta}{r^{p(\gamma+1)}} \right)^{\frac{N}{p(\gamma+1)}} \left(\inf_{B_r(x_0)} u(\cdot, t_0 + \theta) \right)^{\frac{\lambda_\gamma}{p(\gamma+1)}} \right] \end{aligned} \quad (6.46)$$

donde $\lambda_\gamma = N(p-2) + p(\gamma+1) = \frac{1}{\beta(N, p, \gamma)}$.

La demostración adapta la de Di Benedetto en [61] para el caso $\gamma = 0$ al caso de coeficientes variables. Para más detalles en el caso $(\gamma+1) > 0$ véase [7].

Observación 6.3.2 *Cuando $(\gamma+1) \leq 0$ hay contraejemplos, ya vimos en el Ejemplo 5.1.2, para $p = 2$, una función que no satisface la desigualdad de Harnack con $(\gamma+1) \leq 0$. Ese*

mismo ejemplo es válido en este caso, en efecto, tomemos la misma función $u(x, t) = t|x|^\rho$ donde $\rho > 0$. Por cálculo directo se verifica:

$$u_t - \Delta_{p,\gamma} u = |x|^\rho - t^{p-1} \rho^{p-1} ((p-1)\rho + N - p(\gamma+1)) |x|^{(p-1)\rho - p(\gamma+1)}.$$

Entonces para $p \geq 2$, $(\gamma + 1) \leq 0$ y $\rho > 0$, existen r_0, t_0 tales que u es una supersolución de (6.44) en el cilindro $B_{r_0}(0) \times (0, t_0)$. Además, $u(0, t) = 0$ por tanto la desigualdad de Harnack débil no se verifica. Obsérvese que si $1 < p < 2$ y $(\gamma + 1) < 0$, tomando $\rho = \frac{p(\gamma+1)}{p-2}$ y t suficientemente pequeño se obtiene la misma conclusión.

En el Capítulo 5 y Sección 6.2 hemos estudiado el Problema (6.1) en el caso $p = 2$ con condiciones Dirichlet y mixtas respectivamente, donde el sentido de soluciones de entropía coincide con el sentido de la Definición 5.1.8. En el caso cuasilineal, no se conoce un resultado de unicidad similar, por tanto, el sentido preciso en el que probaremos la no existencia será el de entropía, que establecemos en la siguiente definición.

Definición 6.3.3 Decimos que $u \in \mathcal{T}_{\Sigma_1, \gamma}^{1,p}(\Omega \times (0, T))$ si y sólo si la función truncamiento $T_k(u) \in L^p((0, T); E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega))$, para todo $k > 0$.

Definición 6.3.4 Supongamos que f y u_0 son funciones medibles tales que $f \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$. Decimos que una función $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega))$ es una solución de entropía para el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p,\gamma} u = f & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ Bu(x, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{si } x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.47)$$

si $u \in \mathcal{T}_{\Sigma_1, \gamma}^{1,p}(\Omega \times (0, T))$ y

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Theta_k(u - v)(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \langle v_t, T_k(u - v) \rangle dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla T_k(u - v) \rangle |x|^{-p\gamma} dx dt \\ & = \int_{\Omega} \Theta_k(u_0 - v(0)) dx + \int_0^T \int_{\Omega} f T_k(u - v) dx dt, \end{aligned}$$

para todo $k > 0$ y $v \in L^p((0, T); E_{\Sigma_1}^{p, \gamma}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$, para todo $k > 0$ tal que $v_t \in L^{p'}((0, T); (E_{\Sigma_1}^{p, \gamma}(\Omega))')$ donde Θ_k está dado por

$$\Theta_k(s) = \int_0^s T_k(t) dt.$$

Cabe señalar que dada $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ entonces

$$\int_{\Omega} u_t T_k(u) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Theta_k(u) dx$$

que podemos reescribir como

$$\int_{\Omega} \Theta_k(u(x, t)) dx - \int_{\Omega} \Theta_k(u(x, 0)) dx = \int_0^t \int_{\Omega} u_s T_k(u) dx ds.$$

Definición 6.3.5 Decimos que $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ es una solución de entropía para el Problema (6.1) si $F(x, t) \equiv \frac{u^\alpha}{|x|^{p(\gamma+1)}} \in L^1(\Omega \times (0, T))$ y verifica que es solución en sentido de la Definición 6.3.4 con datos $f = F$ y u_0 .

Para estudiar el Problema (6.43) consideramos en primer lugar los problemas truncados:

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta_{p, \gamma} u_n = \lambda W_n(x) u_n^{p-1}, & u_n \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ B(u_n) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_n(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.48)$$

donde $W_n(x) = T_n \left(\frac{1}{|x|^{p(\gamma+1)}} \right) = \min \left\{ n, \frac{1}{|x|^{p(\gamma+1)}} \right\}$.

Observación 6.3.6 Fijado n , el Problema (6.48) tiene solución al menos para tiempos pequeños, dependiendo de n , λ . Este hecho puede probarse utilizando una supersolución adecuada independiente de x (véase la Sección 6.4).

Supongamos que buscamos soluciones del Problema (6.48) del tipo $\Phi(x, t) = T(t)X(x)$, es decir, de variables separadas, para usarlas como subsoluciones, por tanto, podemos tomar condiciones Dirichlet. La ecuación en (6.48) se transforma de la siguiente manera,

$$T'X - T^{p-1} \Delta_{p, \gamma} X = \lambda W_n(x) T^{p-1} X^{p-1},$$

así pues, tomamos $T(t)$ la solución de la ecuación $T'(t) = \mu T^{p-1}(t)$ con dato inicial $T(0) = A$, es decir,

$$T(t) = \frac{A}{[1 - (p-2)\mu A^{p-2}t]^{\frac{1}{p-2}}}.$$

Por otro lado, podemos escoger $X(x)$ solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} X &= \lambda W_n(x) X^{p-1} - \mu X & x \in \Omega, \\ X(x) &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.49)$$

Definimos $Y = \alpha X$ con $\mu\alpha^{p-2} = \lambda$, entonces Y verifica el problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} Y &= \lambda(W_n(x) Y^{p-1} - Y) & x \in \Omega, \\ Y(x) &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.50)$$

Este problema satisface la hipótesis de bifurcación dada en el Capítulo 3. Más precisamente, consideremos $\lambda_1(n)$ el primer autovalor del problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} \phi &= \lambda W_n(x) |\phi|^{p-2} \phi & x \in \Omega, \\ \phi(x) &= 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.51)$$

entonces $\lambda_1(n)$ satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\lambda_1(n) > 0$,
- (ii) $\lambda_1(n)$ es simple y aislado,
- (iii) $|\phi_1| > 0$, para toda autofunción ϕ_1 asociada al primer autovalor $\lambda_1(n)$ y
- (iv) $\lambda_1(n) \searrow \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$.

Véanse el Teorema 2.3.8 y los Lemas 2.3.9 y 2.4.9.

El siguiente resultado es una extensión del método desarrollado en [14] y [70] para $\gamma = 0$.

Teorema 6.3.7 *Supongamos que $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$. Entonces existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, el Problema (6.50) tiene solución positiva acotada.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $(\gamma + 1) > 0$, las posibles soluciones del Problema (6.50) están acotadas, ver el Corolario 2.2.9. Sea $Y > 0$ solución del Problema (6.50) entonces $\|Y\|_\infty \geq R_n > 0$, para alguna constante R_n , en caso contrario, si fuese $\|Y\|_\infty < \varepsilon$

entonces $-\Delta_{p,\gamma} Y \leq \lambda Y (n\varepsilon^{p-2} - 1) < 0$ para $0 < \varepsilon \ll 1$, lo cual es una contradicción con el Principio del Máximo.

Como $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$, existe n_0 tal que para cada $n > n_0$, tenemos que $\lambda > \lambda_1(n)$. Siguiendo las mismas técnicas que en la demostración del Teorema 2.4.8, se demuestra que $\lambda_1(n)$ es el único punto de bifurcación desde infinito para el Problema (6.50). Es más existe una rama no acotada de soluciones positivas (un continuo para ser más precisos), que no puede bajar del nivel $\|u\|_\infty = R_n$, ni cruzar a la izquierda de $\lambda_1(n)$. Por tanto, existe al menos una solución positiva de (6.50) para $\lambda > \Lambda_{N,p,\gamma}$ y $n \geq n_0$. ■

Nótese que este tipo de problemas tiene la siguiente propiedad de invarianza respecto a dilataciones: sea X una solución del Problema (6.50) con $\Omega = B_1(0)$. Definimos

$$Z_n(x) = \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\frac{1}{p-2}} X\left(\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{1}{p(\gamma+1)}} x\right),$$

entonces $Z_n(x)$ satisface el problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p,\gamma} Z_n = \lambda W_n(x) Z_n^{p-1} - \mu Z_n & \text{si } |x| < \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\frac{1}{p(\gamma+1)}}, \\ Z_n = 0 & \text{si } |x| = \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\frac{1}{p(\gamma+1)}}. \end{cases} \quad (6.52)$$

Además, el radio de la bola converge a cero y $\|Z_n\|_\infty \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Entonces, fijados R, η , podemos escoger n de manera que

$$\left(\frac{n_0}{n}\right)^{\frac{1}{p(\gamma+1)}} < R; \quad Z_n(x) \leq \eta \quad \text{en } B_R(0). \quad (6.53)$$

Como consecuencia, podemos encontrar una subsolución para el Problema (6.48).

Lema 6.3.8 *Sea u_n una solución del Problema (6.48) con $\lambda > \lambda_1(n)$ y $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces existe un $T > 0$ dependiendo del dato inicial, y una subsolución ψ verificando $u_n(x, t) \geq \psi(x, t)$ y $\lim_{t \nearrow T} \psi(x, t) = +\infty$, $\forall x \in \Omega$.*

Demostración. La solución u_n es positiva y, por regularidad (véase [7]), la solución es acotada para tiempos pequeños. Consideramos $\psi(x, t) = X(x)T(t)$, solución de variables separadas en el caso $\mu = 1$ y con $T(0) = \varepsilon$ tal que $\varepsilon X(x) \leq \frac{u_n(x, \tau)}{2}$, entonces

$$T(t) = \varepsilon(1 - (p-2)\varepsilon^{p-2}t)^{-\frac{1}{p-2}}.$$

Por el principio de comparación débil concluimos. ■

Lema 6.3.9 *Supongamos las hipótesis (H_1) y (H_2) . Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen $r(\varepsilon) > 0$ y n_ε tales que u_n , la solución minimal del Problema (6.48), verifica que $\forall n \geq n_\varepsilon$,*

$$u_n(x, t) \equiv +\infty \quad \text{para } t > \varepsilon \quad \text{y } |x| < r(\varepsilon).$$

Demostración. Tomamos n_0 tal que $\lambda > \lambda_1(n_0)$. Prescribimos el tiempo de explosión $T = \varepsilon$ y elegimos $\mu > [(p - 2)\varepsilon]^{-1}$. Para tal μ y $n > n_0$ tal que la solución reescalada X_n satisface (6.53) con $R = \rho$, $\eta = \delta$. Consideramos $T(t)$ la solución de $T' = \mu T^{p-1}$ con $T(0) = 1$ y μ como antes. Entonces $\phi_n(x, t) = T(t)X_n(x)$ explota en $T = \varepsilon$. Por comparación débil en la bola $|x| < \left(\frac{n_0}{n}\right)^{\frac{1}{p(\gamma+1)}}$, la solución minimal del Problema (6.48) explota en $T_0 < \varepsilon$. ■

Obsérvese que para obtener un tiempo prescrito de explosión pequeño, basta con tomar el índice n suficientemente grande.

Teorema 6.3.10 *Supongamos las hipótesis (H_1) y (H_2) . Entonces el Problema (6.43) no tiene solución de entropía. Además, si $u_n(x, t)$ es la solución minimal del Problema (6.48), tenemos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = +\infty, \quad \text{para todo } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

Demostración. Suponemos por contradicción que existe una solución de entropía positiva, $u(x, t)$, para el Problema (6.43). En particular, u es supersolución del Problema (6.48) para todo n . Como consecuencia, la solución minimal $u_n(x, t)$ verifica $u_n(x, t) \leq u(x, t)$ y por lo tanto, u explota, al menos en el mismo tiempo en que u_n explota, con lo que concluimos.

Teniendo en cuenta el Lema 6.3.8, obtenemos una región E_∞ tal que

$$E_\infty \supset \{|x| < r(t)\} \times (0, \infty),$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = +\infty, \quad \forall (x, t) \in E_\infty.$$

El siguiente paso consiste en utilizar la desigualdad de Harnack (6.46).

Supongamos que existe un punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (T(\phi), \infty)$ tal que $0 \leq u_n(x_0, t_0) \leq M < \infty$, llamemos

$$\rho(x_0, t_0) = \text{dist} \{(x_0, t_0), \partial\Omega \times \{t = t_0\}\} > 0.$$

Entonces, si $B_r(x_0) \times \{t = t_1\} \cap E_\infty$ tiene medida de dimensión N positiva para algún $r < \rho(x_0, t_0)$ y $t_1 < t_0$, consideramos el problema

$$\begin{cases} (v_n)_t - \Delta_{p,\gamma} v_n = 0 & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ B(v_n(x, t)) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ v_n(x, t_1) = u_n(x, t_1) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.54)$$

entonces $v_n(x, t) \leq u_n(x, t)$ y esto es una contradicción con la desigualdad de Harnack (6.46). Si para todo $r < \rho(x_0)$ y todo $t_1 < t_0$, $|B_r(x_0) \times \{t = t_1\} \cap E_\infty| = 0$ entonces $\forall \delta > 0$ podemos encontrar en un número finito de pasos un punto $(x_1, t_0 - \delta) \in \Omega \times (0, t_0)$ tal que $|B_r(x_0) \times \{t = t_1\} \cap E_\infty| > 0$ y obtenemos una contradicción como antes. ■

Obsérvese que este resultado es más fuerte en algún sentido, que el resultado de Baras-Goldstein (véase [19]) para la ecuación del calor. Precisamente, si $p > 2$, incluso la solución con potencial truncado explota en tiempo finito. Ahora probaremos que incluso si truncamos la no linealidad completa, encontramos explosión espectral instantánea y completa. Concretamente, tenemos

Teorema 6.3.11 *Consideramos los problemas truncados*

$$\begin{cases} (v_n)_t - \Delta_{p,\gamma} v_n = \lambda W_n(x) T_n(v_n^{p-1}), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ B(v_n(x, t)) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_n(x, 0) = \phi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.55)$$

y las hipótesis (H_1) y (H_2) . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) = +\infty \quad \text{para todo } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Usando una adaptación de los argumentos del Capítulo 5 (véase [7] para más detalles) tenemos que si $B_r(0) \subset \Omega$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_r(0)} v_n(x, t) dx = +\infty, \quad \forall t > 0.$$

Ahora por la desigualdad de Harnack y una estrategia similar a la del Teorema 6.3.10 obtenemos la explosión completa. ■

6.3.2 Explosión en el caso $p > 2$, $\alpha > p - 1$ y $\lambda > 0$

En esta subsección tratamos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{|u|^\alpha}{|x|^{p(\gamma+1)}}, u \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.56)$$

con $\alpha > p - 1$ y suponemos que el dato inicial satisface la hipótesis

(H) $\varphi \in L^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ y existe $\delta > 0$ tal que $\varphi > 0$ en $B_\delta(0) \subset \Omega$.

Concretamente, señalamos algunos resultados de no existencia y explosión completa.

Teorema 6.3.12 *Supongamos que φ verifica (H). Entonces el Problema (6.56) no tiene solución positiva de entropía. Si suponemos que $\varphi \equiv 0$, la única solución no negativa de (6.56) es $u \equiv 0$.*

La demostración de este teorema se obtiene de manera análoga a la del Teorema 5.5.8 con las modificaciones obvias. De hecho el resultado está probado en [6] con condiciones Dirichlet. Es más, teniendo en cuenta que todos los argumentos son locales y por tanto las condiciones de contorno no influyen, se puede repetir la misma demostración.

Los mismos comentarios son aplicables al siguiente resultado. Basta repetir los mismos argumentos que en [6].

Teorema 6.3.13 *Sea u_n la solución minimal del problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_{p,\gamma} u_n = a_n(x)g_n(u_n), u_n \geq 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ B(u_n) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_n(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.57)$$

con φ verificando (H), entonces para todo $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0, t_0) = \infty.$$

6.4 Algunos resultados y observaciones sobre la existencia de solución

6.4.1 El caso con $p = 2$, $\alpha = 1$

Sea el Problema (6.1) con $p = 2$ y $\alpha = 1$, es decir,

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{2,\gamma} u = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ B(u) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.58)$$

con $\varphi \in L^2(\Omega)$. Consideremos

$$(1) \quad \lambda < \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1) \text{ y } -\infty < \gamma < \frac{N-2}{2},$$

ó

$$(2) \quad 0 < \lambda \text{ y } (\gamma + 1) \leq 0.$$

En cualquiera de los casos anteriores, se demuestran las mismas estimaciones que con condiciones Dirichlet y argumentando de la misma manera que en la Sección 5.3 obtenemos existencia de solución global para el Problema (6.58). Véase [52] para extensiones al caso cuasilineal con condiciones Dirichlet.

A continuación, estudiamos una perturbación del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{2,\gamma} u = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ Bu(x, t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{si } x \in \Omega, \end{cases} \quad (6.59)$$

para el que, en la Sección 6.2, hemos demostrado explosión espectral instantánea y completa (en las hipótesis $(\gamma + 1) > 0$ y $\lambda > \Lambda_{N,2,\gamma}(\Omega, \Sigma_1)$).

Sea el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{2,\gamma} u = \lambda \frac{u}{|x|^{2(\gamma+1)}} - u^{r-1}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = u^{q-1} & \text{sobre } \Sigma_2 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.60)$$

Entonces tenemos el siguiente resultado de existencia.

Teorema 6.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con $0 \in \Omega$, supongamos la hipótesis (6.3) y consideremos el problema (6.60) con $-1 < \gamma < \frac{N-2}{2}$, $r > \frac{2N}{N-2(\gamma+1)}$, $1 < q < 2$. Entonces (6.60) tiene solución global,

$$u \in L^\infty((0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); E_{\Sigma_1}^{2,\gamma}(\Omega)) \cap L^r((0, T); L^r(\Omega))$$

Demostración. Tomemos u_n la solución minimal del problema truncado

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_{2,\gamma} u_n = \lambda \frac{u_n}{|x|^{2(\gamma+1)} + (1/n)} - u_n^{r-1}, & u_n \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ u_n = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ |x|^{-2\gamma} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} = u_n^{q-1} & \text{sobre } \Sigma_2, \\ u_n(x, 0) = (u_0(x))_n, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.61)$$

Tomando u como función test en (6.60) tenemos la siguiente estimación a priori:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx + \int_0^T \int_{\Omega} |x|^{-2\gamma} |\nabla u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} u^r(x, t) dx dt \\ &= \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \frac{u^2(x, t)}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx dt + \int_0^T \int_{\Sigma_2} |x|^{-2\gamma} u^q(x, t) d\sigma(x) dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2(x) dx. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Por las desigualdades de Hölder y Young obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^{2(\gamma+1)}} dx &\leq \left(\int_{\Omega} u^r dx \right)^{\frac{2}{r}} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^{2(\gamma+1)}} \right)^{\frac{r}{r-2}} dx \right)^{\frac{r-2}{r}} \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} u^r dx + c(\varepsilon) \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x|^{2(\gamma+1)}} \right)^{\frac{r}{r-2}}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

para $\varepsilon > 0$, donde teniendo en cuenta que $r > \frac{2N}{N-2(\gamma+1)}$, el último término en el miembro derecho de la desigualdad (6.63) está acotado.

Utilizando que $q < 2$, el Teorema de la Traza 2.3.15 y la desigualdad de Young resulta:

$$\int_{\Sigma_2} u^q |x|^{-2\gamma} d\sigma(x) \leq C(\Sigma_2, \gamma) \left(\int_{\Omega} |x|^{-2\gamma} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q}{2}} \leq C(\Omega, \Sigma_2, \gamma, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\Omega} |x|^{-2\gamma} |\nabla u|^2 dx.$$

Como consecuencia, tenemos la siguiente estimación a priori,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx + C_1 \int_0^T \int_{\Omega} |x|^{-2\gamma} |\nabla u|^2 dx dt + C_2 \int_0^T \int_{\Omega} u^r dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2(x) dx + C_3 T$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son constantes positivas.

Con esta estimación de energía, podemos pasar al límite en los problemas truncados, como en el Capítulo 5, gracias al Teorema 4.1 de Boccardo-Murat en [30], y obtenemos una solución global para (6.60).

■

Observación 6.4.2 Este último resultado establece que perturbando el Problema (6.59) con el término de absorción $-u^r$ en el segundo miembro, se quema la suficiente masa de manera que desaparece el fenómeno de explosión, incluso añadiendo un término de reacción u^q en $\Sigma_2 \times (0, T)$, lo cual no es muy sorprendente dado que éste es subcrítico. Esto da una idea de como, quitando masa por un lado y añadiéndola por otro, se puede demostrar existencia o explosión. En esta dirección se pretende seguir investigando.

6.4.2 El caso con $1 < p < 2$, $(\gamma + 1) > 0$

En esta subsección, señalamos el siguiente resultado de existencia para $1 < p < 2$ y $(\gamma + 1) < \frac{N(2-p)}{2p}$.

Teorema 6.4.3 Sea φ una función positiva tal que $\varphi \in L^2(\Omega)$. Supongamos que $(\gamma + 1) < \frac{N(2-p)}{2p}$, $p - 1 < \alpha < \frac{N - 2p(\gamma + 1)}{N}$. Sea el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p,\gamma} u = \lambda \frac{u^\alpha}{|x|^{p(\gamma+1)}}, & u \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.64)$$

Entonces el problema (P) tiene una solución global

$$u \in L^p\left((0, T); E_{\Sigma_1}^{p,\gamma}(\Omega)\right) \cap L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)).$$

La demostración es idéntica al caso Dirichlet, establecido en [6]. En primer lugar se obtienen estimaciones a priori, después se utiliza el Lema de Gronwall y finalmente por los resultados de convergencia de Boccardo-Murat en [30] se obtiene una solución global.

6.4.3 El caso con p general y $(\gamma + 1) \leq 0$

En esta subsección consideramos $p > 1$ y $(\gamma + 1) \leq 0$. Sean $\alpha > 1$ y $c_1, c_2 > 0$. Supongamos que $y(t)$ es la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} y'(t) = c_1 y^\alpha(t), & t > 0 \\ y(0) = c_2. \end{cases}$$

Entonces $y(t) = (c_2^{1-\alpha} - (\alpha - 1)c_1 t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, por tanto, existe $t_0 > 0$ tal que si $0 < t \leq t_0$ se verifica que $y(t) \geq 0$. Tomemos $c_1 \geq \max\{|x|^{-p(\gamma+1)} \mid x \in \Omega\}$, entonces tenemos que la función $v(x, t) \equiv y(t)$ es una supersolución del Problema (6.1) para cualquier dato $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq c_2$ y todo $t < t_0$. De esta manera, usando un argumento de iteración, se concluye que el Problema (6.1) con dato inicial $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ tiene solución positiva para cualquier $\alpha > \max\{1, p - 1\}$ y valores pequeños de t .

En [52] (con condiciones Dirichlet), se analiza en detalle bajo qué condiciones existe solución global, incluso muy singulares y la extinción en tiempo finito en el caso $1 < p < 2$. En particular, se demuestra que para el caso $\alpha = p - 1$ hay solución débil global para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para datos mixtos es aún desconocido, y esto constituye una línea de trabajo en progreso.

Bibliografía

- [1] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, *Existence and nonexistence results for a class of linear and semilinear parabolic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*. Jour. of European Math. Soc. vol. **6** (2004), 119-148.
- [2] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, *Existence and nonexistence results for a class of parabolic equations with mixed boundary conditions*. En preparación.
- [3] B. Abdellaoui, V. Felli, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear equations involving the p -Laplacian*. Aparecerá en el Bolletino de la U.M.I.
- [4] B. Abdellaoui, I. Peral, *Some results for semilinear elliptic equations with critical potential*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **132** (2002), no. 1, 1-24.
- [5] B. Abdellaoui, I. Peral, *Some results for quasilinear elliptic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, Commun. Pure Appl. Anal. **2** (2003), no. 4, 539-566.
- [6] B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear parabolic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg*, Preprint (2003).
- [7] B. Abdellaoui, I. Peral, *Harnack inequality for degenerate parabolic equations related to Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*. Aparecerá en Nonlinear Analysis.
- [8] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Ed. Academic Press, 1975.
- [9] J. A. Aguilar, I. Peral, *Global behaviour of the Cauchy Problem for some Critical Nonlinear Parabolic Equations*, SIAM Journal in Mathematical Analysis Vol. **31**, no. 6 (2000), 1270-1294.

- [10] W. Allegretto, Y. X. Huang *A Picone's identity for the p -Laplacian and applications*, Nonlinear Anal. T.M.A. Vol. **32**, no. 7, (1998), 819-830.
- [11] H. Amann, *Lusternik-Schnirelman Theory and Nonlinear eigenvalue problems*, Math. Ann. **199** (1972), 55-72.
- [12] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*. SIAM Rev. **18** (1976), no. 4, 620-709.
- [13] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122**, no. 2 (1994), 519-543.
- [14] A. Ambrosetti, J. García Azorero, I. Peral, *Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations*. J. Funct. Anal. **137** (1996), 219-242.
- [15] A. Ambrosetti, J. García Azorero, I. Peral, *Quasilinear equations with a multiple bifurcation*. Diff. Int. Eq. **10** (1997), no. 1, 37-50.
- [16] A. Ambrosetti, P. Hess, *Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems*, J. Math. Anal. Appl. **73** (1989), no. 2, 411-422.
- [17] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.
- [18] A. Anane, *Simplicity and isolation of the first eigenvalue of the p -Laplacian with weight* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), no. 16, 725-728.
- [19] P. Baras, J. Goldstein, *The heat equation with singular potential*, Trans. Amer. Math. Soc. **294** (1984), 121-139.
- [20] T. Bengt, *Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces*. Lecture Notes in Mathematics, 1736. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [21] P. Benilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vázquez, *An L^1 theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. **22**, no. 2, (1995), 240-273.
- [22] P. Benilan, H. Brezis, M. Crandall, *A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **2**, no. 4 (1975), 523-555.

- [23] H. Berestycki, M. Grossi, F. Pacella, *A nonexistence theorem for an equation with critical Sobolev exponent in the half space*. Manuscripta Math. **77** (1992), no. 2-3, 265-281.
- [24] H. Berestycki, L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **22** (1991), no. 1, 1-37.
- [25] H. Berestycki, L. Nirenberg, S.R.S. Varadhan, *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains*. Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 1, 47-92.
- [26] D. Blanchard, F. Murat, *Renormalised solutions nonlinear parabolic problems with L^1 data: existence and uniqueness*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 6, 1137-1152.
- [27] L. Boccardo, A. Dall'Aglia, T. Gallouët, L. Orsina, *Nonlinear parabolic equations with measure data*, J. Funct. Anal. **147** (1997), no. 1, 237-258.
- [28] L. Boccardo, M. Escobedo, I. Peral, *A Dirichlet problem involving critical exponents*, Nonlinear Anal. **24** (1995), no. 11, 1639-1648.
- [29] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measures data*, J. Funct. Anal. **87** no. 1 (1989), 149-169.
- [30] L. Boccardo, F. Murat, *Almost Everywhere Convergence of the Gradients of Solutions to Elliptic and Parabolic Equations*, Nonlinear Analysis T.M.A. Vol. **19**, no. 6, (1992) 581-597.
- [31] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Ed. Mason, 1983.
- [32] H. Brezis, X. Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solution*, Boll. Unione. Mat. Ital. Sez. B, Vol. **8** no. 1, (1998), 223-262.
- [33] H. Brezis, T. Cazenave, Y. Martel, A. Ramiandrisoa, *Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited*. Adv. Differential Equations. Vol. **1**, no. 1, (1996), 73-90.
- [34] H. Brezis, M. Crandall, *Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta \varphi(u) = 0$* , J. Math. Pures Appl. (9) **58**. no. 2, (1979), 153-163.

- [35] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*. Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 486-490.
- [36] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437-477.
- [37] H. Brezis, L. Nirenberg, *H^1 versus C^1 local minimizers*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), no. 5, 465-472.
- [38] X. Cabré, *On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations*. Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), no. 5, 539-570.
- [39] X. Cabré, Y. Martel, *Existence versus instantaneous blow-up for linear heat equations with singular potentials*. C.R.A.S. Paris. **329** Serie I, (1999), 973-978.
- [40] L. Caffarelli, X. Cabré, *Fully nonlinear elliptic equations*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 43. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [41] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights*, Compositio Math. **53** (1984), no. 3, 259-275.
- [42] F. Catrina, Z. Q. Wang, *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. **54**, no. 2, (2001), 229-258.
- [43] W. X. Chen, C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*. Duke Math. J. **63** (1991), no. 3, 615-622.
- [44] F. M. Chiarenza, M. Frasca, *Boundedness for the solutions of a degenerate parabolic equation*, Applicable Anal. Vol. **17**, no. 4 (1984), 243-261.
- [45] F. M. Chiarenza, R. P. Serapioni, *A Harnack inequality for degenerate parabolic equations*. Comm. in PDE, Vol. **9**, no. 8 (1984), 719-749.
- [46] K.S. Chou, C.W. Chu, *On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality*. J. London Math. Soc. (2) **48** no. 1 (1993), 137-151.

- [47] E. Colorado, *Principios del Máximo para Ecuaciones Elípticas de Segundo Orden: Aplicaciones* Tesis de Licenciatura, 1999.
- [48] E. Colorado, I. Peral, *Semilinear elliptic problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions*. J. Funct. Anal. **199**, no. 2 (2003), 468-507.
- [49] E. Colorado, I. Peral, *Eigenvalues and bifurcation for elliptic equations with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions related to Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*. Aparecerá en Topological Methods in Nonlinear Analysis (2004).
- [50] E. Colorado, I. Peral, *Some results for elliptic eigenvalue problems with moving mixed boundary conditions*. Aparecerá en los Proceedings de Equadiff-2003.
- [51] E. Colorado, I. Peral, *On some critical elliptic problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions*. Prepublicación 2004.
- [52] A. Dall'Aglio, D. Giachetti, I. Peral, *Results on parabolic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*. Aparecerá en SIAM Journal in Mathematical Analysis (2004).
- [53] L. Damascelli, F. Gladiali, *Some nonexistence results for positive solutions of elliptic equations in unbounded domains*. Aparecerá en Rev. Mat. Iberoamericana.
- [54] J. Dávila, *A strong maximum principle for the Laplace equation with mixed boundary condition*, J. Funct. Anal. **183** (2001), 231-244.
- [55] J. Dávila, *A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions*, Asymptot. Anal. **28** (2001), no. 1, 279-307.
- [56] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.(3), (1957), 25-43.
- [57] M. A. Del Pino, R. F. Manásevich *Global bifurcation from the eigenvalues of the p -Laplacian*. J. Diff. Eqns. **92** (1991), no. 2, 226-251.
- [58] J. Denzler, *Bounds for the heat diffusion through windows of given area*, J. Math. Anal. Appl. **217** (1998), no. 2, 405-422.

- [59] J. Denzler, *Windows of given area with minimal heat diffusion*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 2, 569-580.
- [60] E. Di Benedetto, $C^{1,\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications Vol 7, No 8 (1983), 827-850.
- [61] E. Di Benedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [62] P. Drabek, A. Kufner, E. Nicolosi, *Nonlinear Elliptic Equations* Publications of the University of West Bohemia, Pilsen, 1996.
- [63] H. Egnell, F. Pacella, M. Tricarico, *Some remarks on Sobolev inequalities*, Nonlinear Anal. **13** (1989), no. 6, 671-681.
- [64] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press 1992.
- [65] C. L. Fefferman, *The uncertainty principle*. Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1983), no. 2, 129-206.
- [66] H. Fujita, *On Some Nonexistence and Nonuniqueness Theorems for Nonlinear Parabolic Equation*, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. **18**, AMS, Providence, RI, 1968.
- [67] J. García Azorero, J. Manfredi, I. Peral, *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*. Commun. Contemp. Math. **2** (2000), no. 3, 385-404.
- [68] J. García Azorero, I. Peral, *Existence and nonuniqueness for the p -laplacian: Nonlinear Eigenvalues*. Commun. in PDE **12** (1987), 1389-1430.
- [69] J. García Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with non-symmetric term*. Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), no. 2, 877-895.
- [70] J. García Azorero, I. Peral, *Hardy Inequalities and some critical elliptic and parabolic problems*. J. Diff. Eqns. **144** (1998), no. 2, 441-476.

- [71] J. García Azorero, I. Peral, *Some remarks on bifurcation*. Diff. Int. Eq. **16** (2003), no. 3, 281-302.
- [72] I. M. Gelfand, *Some problems in the theory of quasilinear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Vol **29** (1963), 295-381.
- [73] N. Ghoussoub, D. Preiss, *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **6** (1989), 321-330.
- [74] B. Gidas, J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), no. 8, 883-901.
- [75] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [76] E. Giusti, *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.
- [77] J. A. Goldstein, Qi S. Zhang *Linear parabolic equations with singular potentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** no. 1 (2003) 197-211.
- [78] H. Groemer, *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press. Vol. 61, 1996.
- [79] M. Grossi, *On some Semilinear Elliptic Equations with Critical Nonlinearities and with Mixed Boundary Conditions*, Rend. Mat. Serie VII, Vol. **10** (1990), 287-302.
- [80] M. Guedda, L. Veron, *Bifurcation phenomena associated to the p -Laplace operator*. Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), no. 1, 419-431.
- [81] M. Guedda, L. Veron, *Quasilinear Elliptic Equations involving Critical Sobolev Exponents*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **13** no. 8 (1989) 879-902.
- [82] C. E. Gutiérrez, R. L. Wheeden, *Mean value Harnack inequalities for degenerate parabolic equations*. Colloquium Mathematicum. (1990), Vol LX/LXI, 157-194.

- [83] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.
- [84] J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Clarendon Press, 1993.
- [85] D. D. Joseph, T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*. Arch. Rational Mech. Anal. **49** (1972/73), 241-269.
- [86] M. A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon, Oxford, 1965.
- [87] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva *Linear and Quasilinear Equations of parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.
- [88] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Moscow: Izdat. "Nauka" 1964 [Russian]. English Translation: New York, Academic Press 1968. 2nd Russian ed. 1973.
- [89] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et equations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Vol. **51** (1934), 45-78.
- [90] G.M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [91] C. S. Lin, W. M. Ni, I. Takagi, *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system*. J. Differential Equations **72** (1988), no. 1, 1-27.
- [92] P. Lindqvist, *On the equation $\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$* , Proc. A.M.S. **109** (1990), no.1, 157-164.
- [93] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case*, Parts I and II, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 1 145-201 and no. 2 45-121.
- [94] P. L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, *Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions*. Indiana Univ. Math. Jour. **37** (1988), no. 2, 301-324.
- [95] L. Lusternik, L. Schnirelmann, *Méthode topologique dans les problèmes variationnelles*, Hermann, Paris(1934).

- [96] J. Malý, W. Ziemer, *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*. Mathematical Surveys and Monograph, Vol 51, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1997.
- [97] Y. Martel, *Complete blow up and global behaviour of solutions of $u_t - \Delta u = g(u)$* . Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **15** (1998), no. 6, 687-723.
- [98] F. Merle, L. A. Peletier, *Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth*, Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh Vol. **118** A (1991), 49-62.
- [99] C. Miranda, *Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche*, Ann. Mat. Pura Appl. **4** 39 (1955), 279-303.
- [100] J. Moser, *A new proof of the De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*. Comm. Pure Appl. Math., **14** (1960) 259-273.
- [101] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. **13** (1961) 577-591.
- [102] J. Moser, *On Harnack's inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. **17** (1964) 101-134.
- [103] J. Nash, *Continuity of solution of parabolic and elliptic equations* Amer. J. of Math. **80** (1958), 931-954.
- [104] F. Pacella, M. Tricarico, *Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **34** (1985/86), no. 1, 75-93.
- [105] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p -Laplacian*, Lecture Notes of the Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, I.C.T.P., Trieste, Italy, 1997.
- [106] I. Peral, J. L. Vázquez, *On the Stability or Instability of the Singular Solution of the Semilinear Heat Equation with Exponential Term*, Arch. Rat. Mech and Analysis Vol. **129** (1995), 201-224.

- [107] M. Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine*, Ann. Scuola. Norm. Pisa. Vol 11 (1910), 1-144.
- [108] M. Pierre, *Uniqueness of the solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ with initial datum a measure*, Nonlinear Anal. Vol. 6 (1982), no. 2, 175-187.
- [109] A. Prignet, *Existence and uniqueness of entropy solution of parabolic problems with L^1 data*, Nonlinear Anal. T.M.P. Vol. 28, no. 12 (1997), 1943-1954.
- [110] M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1984).
- [111] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. 7 (1971), 487-513.
- [112] P. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. CBMS Regional Conference no. 65 A.M.S.
- [113] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*, Acta Math. 111 (1964), 247-302.
- [114] J. Serrin, *A Symmetry Problem in Potential Theory*, Arch. Ration. Mech. 43 (1971), 304-318.
- [115] E. Shamir, *Regularization of Second-Order Elliptic Problems*, Israel J. Math. 6 (1968), 150-168.
- [116] G. Stampacchia, *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, (Italian) Ann. Mat. Pura Appl. 51 4 (1960), 1-37.
- [117] G. Stampacchia, *Equations Elliptiques du Second Ordre a Coefficients Discontinus*, Les Presses de L'Universite de Montreal, 1966.
- [118] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press (1970).
- [119] M. Struwe, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*. Third edition. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 34. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

- [120] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110 (1976), 353-372.
- [121] S. Terracini, *Symmetry properties of positive solutions to some elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, Diff. Int. Eq. 8 (1995), no. 8, 1911-1922.
- [122] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent*, Adv. Diff. Eq. 1 (1996), no. 2, 241-264.
- [123] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Eq. 51 (1984), 126-150.
- [124] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. 12 (1984), no. 3, 191-202.
- [125] J. L. Vázquez, E. Zuazua, *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*. J. Funct. Anal. 173 (2000), no. 1, 103-153.
- [126] Z-Q. Wang, M. Zhu, *Hardy inequalities with boundary terms*, Electron. Jour. Diff. Eqns. 43 (2003), 8 pp. (electronic).
- [127] G. T. Whyburn, *Topological Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1964.
- [128] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 1988.

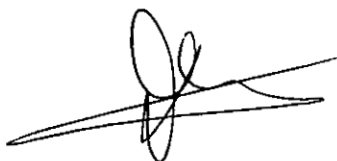
Reunido el tribunal que suscribe en el día
de la fecha, acordó calificar la presente Tesis
doctoral con ~~SOBRESALIENTE~~ "CUM LAUDE"

MADRID 2 Julio 2004

A large, stylized handwritten signature in black ink, possibly reading "Luis" or "Luisa".

Xavier Celli

Luis Boccardo

A handwritten signature in black ink, possibly reading "Luis" or "Luisa".A handwritten signature in black ink, possibly reading "Luis" or "Luisa".